1ª SÉRIE

ENSINO MÉDIO
Caderno do Aluno
Volume 1

MATEMÁTICA

Nome: ____________________________________

Escola: ___________________________________

____

Distribuição gratuita, venda proibida

GOVERNO DO ESTADO
SÃO PAULO
Secretaria da Educação

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

MATERIAL DE APOIO AO CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

CADERNO DO ALUNO

MATEMÁTICA

ENSINO MÉDIO
1ª SÉRIE
VOLUME 1

Nova edição
2014-2017

São Paulo

Caro(a) aluno(a),

Para viver no mundo atual com qualidade de vida é preciso ter cada vez mais conhecimentos, respeitar valores e desenvolver atitudes positivas em relação a si e aos outros. Os conhecimentos que a humanidade construiu ao longo do tempo é um valioso tesouro, que nos permite compreender o mundo que nos cerca, interagir com as pessoas, tomar decisões... Ler, observar, registrar, analisar, comparar, refletir e expressar-se são algumas formas de compartilhar esse tesouro. Sendo assim, este material foi elaborado especialmente para ajudar você a compreender e a utilizar parte desses conhecimentos.

O objetivo das Situações de Aprendizagem deste Caderno é apresentar conhecimentos matemáticos de forma contextualizada, para que a aprendizagem seja construída como parte de sua vida cotidiana e do mundo ao seu redor. Logo, as atividades propostas não devem ser consideradas simplesmente exercícios ou problemas a serem resolvidos com técnicas transformadas em rotinas automatizadas. Pelo contrário, muitas dessas situações podem ser vistas como ponto de partida para estudar ou aprofundar uma noção ou propriedade matemática.

Aprender exige esforço e dedicação, mas também envolve curiosidade e criatividade, que estimulam a troca de ideias e conhecimentos. Por isso, sugerimos que você participe das aulas, observe as explicações do professor, faça anotações, exponha suas dúvidas; além disso, é importante que você não se intimide em fazer perguntas e que procure respostas aos seus questionamentos, e que também dê sua opinião.

Neste Caderno, você estudará os seguintes assuntos: sistema de numeração decimal e suas operações, sequências numéricas, mínimo múltiplo comum, divisores de um número natural, números primos, frações e medidas, equivalência e operações com frações, números decimais (agrupamentos e valor posicional, transformações), equivalência e operações com números decimais, uso da linguagem mista e localizações desses números na reta numérica, e também as medidas não padronizadas.

Se precisar, peça ajuda ao professor, pois ele pode orientá-lo sobre o que estudar e pesquisar, como organizar os estudos e onde buscar mais informações sobre um assunto. Reserve todos os dias um horário para fazer as tarefas e rever os conteúdos, porque assim você evita que eles se acumulem. Ajude e peça ajuda aos colegas, pois partilhar ideias é fundamental para a construção do conhecimento.

Aprender pode ser muito prazeroso, e temos certeza de que você vai descobrir isso.

Equipe Curricular de Matemática
Coordenadoria de Gestão da Educação Básica – CGEB
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1
CONJUNTOS NUMÉRICOS; REGULARIDADES NUMÉRICAS E GEOMÉTRICAS

Leitura e análise de texto

Observando padrões e regularidades

Você já reparou que as pessoas, em muitos momentos do dia, estão diante de situações que envolvem uma sequência de números? O torcedor procura, em uma tabela no caderno de esportes do jornal, a posição de seu time no campeonato nacional. Para localizar uma determinada residência em uma rua, o carteiro observa certa regra na numeração das casas: de um lado, estão dispostas as casas de numeração par em sequência crescente ou decrescente, e, do outro lado, as de numeração ímpar. Em um edifício, a numeração dos apartamentos indica também o andar em que eles se localizam. No hospital, a enfermeira é orientada sobre a sequência de horários em que deve administrar certo medicamento ao paciente.

O ser humano também observa vários movimentos naturais que seguem uma determinada sequência, formando, assim, certo padrão: os períodos do dia, as estações do ano, as fases da Lua e o período de aparecimento de um cometa são alguns desses movimentos.

Desde a Antiguidade, grande parte do trabalho dos matemáticos e cientistas tem sido observar e registrar fenômenos que ocorrem segundo um padrão. O encontro de um padrão ou de uma regularidade será uma das possibilidades de compreensão, previsão e controle desses fenômenos.

Para abordar esse assunto, este Caderno explora, inicialmente, as sequências numéricas que podemos construir a partir dos conjuntos numéricos que conhecemos: os naturais, os inteiros, os racionais e os reais.

Para lembrar:

Conjunto dos números naturais $\Rightarrow$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$

Conjunto dos números inteiros $\Rightarrow$ $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$

VOCÊ APRENDEU?

1. Dados os conjuntos a seguir, descritos em linguagem cotidiana, encontre, em cada caso, seus elementos e traduza a descrição dada para a linguagem matemática.

a) O conjunto **A** é formado por números naturais maiores do que 4 e menores ou iguais a 11.

b) O conjunto **B** é formado por números naturais menores ou iguais a 6.

c) O conjunto **C** é formado por números inteiros maiores ou iguais a –3 e menores do que 5.

d) O conjunto **D** é formado por números inteiros maiores ou iguais a –2.

2. Quais são os cinco menores números que pertencem a cada um dos seguintes conjuntos?

a) **E** é o conjunto dos cinco menores números naturais que são divisíveis por 4.

b) **F** é o conjunto dos cinco menores números naturais ímpares maiores do que 7.

c) **G** é o conjunto dos cinco menores números inteiros que, elevados ao quadrado, resultam em um número menor do que 10.

d) **H** é o conjunto dos cinco menores números naturais que, quando dobrados e somados a 1, resultam em um número maior do que 7.

3. Descreva, em linguagem matemática, os conjuntos **E**, **F**, **G** e **H**, apresentados na atividade anterior.

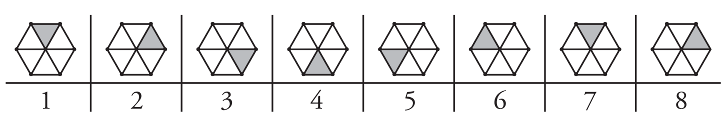
4. A seguir, são apresentadas três sequências numéricas infinitas. Observando cada uma delas, responda:

   a) Qual é o 100º termo nesta sequência: 1, 1, 1, 1, 1, ...?

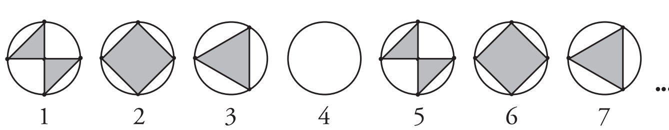
   b) Qual é o 120º termo nesta sequência: 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, ...?

   c) Qual é o 25º termo nesta sequência: 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, ...?

5. A seguir, é apresentada uma sequência na forma figurativa. Descreva, em palavras, o padrão de regularidade desta sequência e indique qual deve ser a figura que ocupa a 152ª posição.



6. Observe a sequência de figuras:



Supondo que a lei de formação continue a mesma, desenhe as figuras que deverão ocupar as posições 38ª e 149ª nessa sequência. Justifique sua resposta.

7. Observe a sequência (1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1...). Supondo que a lei de formação dessa sequência permaneça, determine o 38º e o 149º termos.

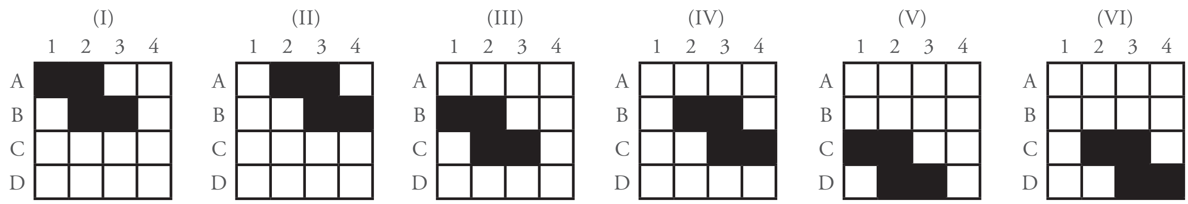
8. Hoje é quarta-feira. Devo pagar uma dívida daqui a exatamente 90 dias. Em que dia da semana cairá o 90º dia?

9. Um processo de reflorestamento previa a plantação de certo número **x** de mudas de árvores. No primeiro dia, foram plantadas 120 árvores, e planejou-se que, nos dias seguintes, seriam plantadas, por dia, dez árvores a mais do que no dia anterior. Sendo assim:

   a) quantas árvores serão plantadas no sétimo dia?

   b) qual é o número **x**, se, no final do décimo dia, havia sido plantada a metade do total previsto inicialmente?

10. Observe os seis primeiros termos de uma sequência.



Supondo que a regularidade observada na formação desses termos seja mantida para a formação dos demais, isto é, que o termo (I) seja igual ao termo (VII), que o termo (II) seja igual ao termo (VIII), e assim por diante, responda:

a) quais quadrículas estarão pintadas no termo (XXX)?

b) quantas vezes a quadrícula B2 terá sido pintada desde o termo (I) até o termo (XIX)?

LIÇÃO DE CASA

11. Aproveitando as condições apresentadas na atividade 9 da seção anterior, crie três questões acompanhadas de sua resolução.

12. Atribui-se ao matemático grego Hipsicles (240 a.C.-170 a.C.) uma regra para criar uma nova sequência numérica a partir de outra. O método consiste em tomar uma sequência numérica (por exemplo,1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) e criar outra em que cada termo seja igual à soma dos anteriores. Isto é:

	Sequência nova
1	1
1 + 2	3
1 + 2 + 3	6
1 + 2 + 3 + 4	10
1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
...	...

Pela regra de Hipsicles, a sequência (1, 2, 3, 4, ...) gerou a sequência (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...).

Aplique a regra de Hipsicles e encontre os oito primeiros termos de duas novas sequências numéricas geradas a partir da sequência (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...).

13. Uma sequência numérica crescente é composta por cinco termos. O terceiro termo é o número 1, e o quarto e quinto termos são as raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$. Encontre o primeiro e o segundo termos dessa sequência, considerando que exista diferença constante entre dois termos consecutivos.

VOCÊ APRENDEU?

Sequências definidas por sentenças matemáticas

14. Em uma sequência numérica, o primeiro termo é uma fração de numerador 1 e denominador 4. Os termos seguintes ao primeiro podem ser obtidos adicionando sempre uma unidade ao numerador e ao denominador da fração do termo imediatamente anterior.

a) Quais são os cinco primeiros termos dessa sequência?

b) Chamando o primeiro termo de a_1, o segundo termo de a_2, o terceiro de a_3, e assim por diante, quanto é o termo a_9?

c) Qual é o termo a_{54}?

d) Como se pode determinar um termo a_n qualquer?

15. Em uma sequência numérica, o primeiro termo é igual a 2, e os seguintes são obtidos pelo acréscimo de três unidades ao termo imediatamente anterior. Sendo assim, responda:

a) quais são os cinco primeiros termos?

b) qual é o termo a_{10}?

c) qual é o termo a_{20}?

d) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

16. Para se obter os termos de uma sequência numérica, é necessário fazer o seguinte:

I. Elevar a posição do termo ao quadrado, isto é, calcular 1^2 para o primeiro termo, 2^2 para o segundo termo, 3^2 para o terceiro termo, e assim por diante.

II. Adicionar duas unidades ao resultado obtido após elevar ao quadrado a posição do termo.

Para essa sequência numérica, responda:

a) quais são os cinco primeiros termos?

b) qual é o 8º termo?

c) qual é o termo a_{20}?

d) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

17. Observe os cinco primeiros termos da seguinte sequência numérica: 3, 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$.

Demonstre que é possível determinar os termos dessa sequência a partir da expressão $a_n = \frac{n+2}{n}$, atribuindo a **n** valores naturais maiores do que zero.

18. A expressão $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ é a expressão do termo geral de uma sequência numérica, isto é, os termos da sequência podem ser obtidos se forem atribuídos a **n** valores naturais maiores do que zero. Sendo assim, encontre:

a) o termo a_1;

b) o termo a_5;

c) o 8º termo;

d) a posição do termo que é igual a $\dfrac{9}{11}$.

19. Determinada sequência numérica tem $a_1 = 9$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ e $a_4 = \dfrac{1}{3}$. Nessa sequência, qual é:

a) o 5º termo?

b) o termo a_6?

c) a posição do termo que é igual a $\dfrac{1}{81}$?

20. Qual das duas expressões listadas a seguir é a expressão do termo geral da sequência da atividade anterior? (Lembre-se de que **n** é o número que dá a posição do termo na sequência, isto é, se n = 2, temos o segundo termo; se n = 5, temos o quinto termo; e assim por diante.)

$$a_n = \frac{9}{3^n} \qquad\qquad a_n = 3^{3-n}$$

21. Observe a seguinte sequência dos números pares positivos: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... Nessa sequência:

   a) qual é o 10º termo?

   b) qual é o 15º termo?

   c) qual é o termo a_{35}?

   d) qual é o termo a_{101}?

   e) qual é a posição do termo que é igual a 420?

   f) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

22. Escreva os cinco primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Em seguida, responda:

   a) qual é o 10º termo?

   b) qual é o termo a_{13}?

   c) qual é o termo a_{25}?

   d) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

23. Observe a seguinte sequência numérica: 1, 4, 9, 16, 25, ... Nessa sequência, responda:

a) qual é o 6º termo?

b) qual é o termo a_7?

c) qual é a expressão de seu termo geral?

LIÇÃO DE CASA

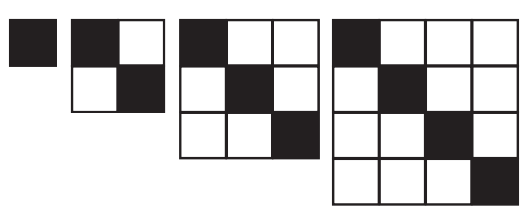
24. Uma sequência numérica é dada pelo seguinte termo geral: $a_n = \sqrt{n+1}$.

Para essa sequência, determine:

a) os cinco primeiros termos;

b) os cinco primeiros termos que sejam números inteiros.

25. Observe a sequência de figuras. Em seguida, responda:



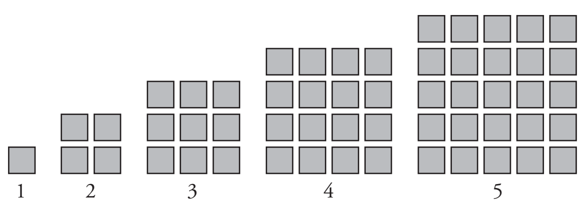
a) Quantos quadrinhos brancos deverá ter a 6ª figura dessa sequência?

b) Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de quadrinhos brancos, em função da posição **n** da figura, na sequência.
(**Sugestão:** você pode organizar os dados em uma tabela como a que segue.)

Posição da figura na sequência	Número de quadrinhos pretos	Número de quadrinhos brancos
1	1	0
2		
3		
4		
n		

c) Quantos quadrinhos brancos deverá ter a 39ª figura dessa sequência?

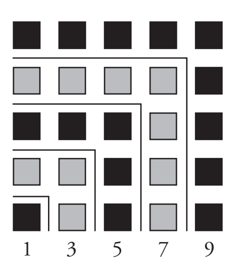
26. A seguir, estão os primeiros elementos de uma sequência de figuras que representam os chamados números quadrangulares. Analise-os e responda às questões propostas.



a) Quantos quadrinhos deverá ter o 6º elemento dessa sequência? E o 10º termo?

b) Qual é a expressão do termo geral dessa sequência?

27. Observe a figura:



Nessa representação, os números escritos logo abaixo da figura indicam a quantidade de quadrinhos de cada um desses conjuntos. Sendo assim, responda:

a) qual é a soma dos números escritos abaixo da figura?

b) que relação pode ser estabelecida entre esse resultado e a figura analisada?

c) utilizando os resultados de suas observações, determine, sem efetuar a adição, o resultado de $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$.

28. Observe as linhas completas da tabela e complete as que estiverem em branco.

Adição	Descrição
$1 + 3 = 4 = 2^2$	A soma dos dois primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	A soma dos três primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 3.
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	
	A soma dos cinco primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 5.
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2 \cdot n - 1 = n^2$	

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

VOCÊ APRENDEU?

1. Considere as sequências de (I) a (VI) para responder às questões propostas.

(I) (0, 3, 6, 9, 12, ...)

(II) (1, 4, 7, 10, 13, ...)

(III) (2, 5, 8, 11, 14, ...)

(IV) (–2, 4, –8, 16, –32, ...)

(V) (0,2; 0,4; 0,6; 0,8; ...)

(VI) (1, 4, 16, 64, 256, ...)

a) Quais são os três termos seguintes de cada uma dessas sequências?

b) É verdade que o algarismo 8 não aparece em nenhum número da sequência (II)? Justifique.

c) É possível que um mesmo número natural apareça em duas das três primeiras sequências? Justifique.

d) O número 1 087 é um termo de qual(is) sequência(s)?

e) Explique por que o número 137 não pertence à sequência (II).

f) Qual é o termo geral da sequência (I)?

g) Qual é o termo geral da sequência (II)?

h) Qual é o termo geral da sequência (III)?

i) Qual é o termo geral da sequência (IV)?

j) Qual é o termo geral da sequência (V)?

k) Qual é o termo geral da sequência (VI)?

l) Escolha um critério, justificando-o, e separe as seis sequências em dois grupos.

2. Sabe-se que as Olimpíadas, a Copa do Mundo e os Jogos Pan-americanos ocorrem de quatro em quatro anos. Se essas competições ocorreram nos anos de 2004, 2006 e 2007, respectivamente, e considerando que continuem a acontecer, segundo essa regra, por muito tempo, responda:

   a) Qual competição ocorrerá em 2118? E em 2079 e 2017?

   b) Haverá algum ano em que ocorrerá mais de uma dessas três competições? Explique.

3. Determinada sequência numérica obedece à seguinte condição: a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma e igual a 6. Considerando que o primeiro termo dessa sequência é –8, responda:

   a) quais são os cinco primeiros termos?

   b) qual é o termo a_9?

c) qual é o 15º termo?

d) qual é o 20º termo?

e) quanto é a diferença entre a_{12} e a_5?

f) qual é a expressão de seu termo geral, isto é, qual é a fórmula matemática que relaciona um termo qualquer ($\mathbf{a_n}$) à posição do termo (**n**)?

4. O primeiro termo de uma sequência numérica é 0,02. Para obter os termos seguintes, basta multiplicar o termo imediatamente anterior por 5. Sendo assim, responda:

a) qual o 2º termo?

b) qual é o termo a_3?

c) qual é o termo a_4?

d) qual é o resultado da divisão entre a_6 e a_4?

e) qual é o termo geral da sequência, isto é, qual é a fórmula matemática que relaciona um termo qualquer ($\mathbf{a_n}$) à posição do termo (**n**)?

5. Considere que: uma PA é uma sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) de números $\mathbf{a_n}$, em que a diferença entre cada termo $\mathbf{a_{n+1}}$ e seu antecedente $\mathbf{a_n}$ é uma constante. Essa diferença constante é chamada de razão da PA, e é representada por **r**. Assim, em uma PA de razão **r**, temos: $a_{n+1} - a_n = r$; para todo **n** natural, $n \geq 1$. De acordo com essa definição, indique quais das sequências a seguir são PAs. Em caso afirmativo, determine a razão.

a) (2, 5, 8, 11, ...).

b) (2, 3, 5, 8, ...).

c) (7, 3, –1, –5, ...).

d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, ...\right)$.

e) $\left(-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, ...\right)$.

f) $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, ...\right)$.

6. Considere as sequências dadas por seus termos gerais:

   I) $a_n = 4 \cdot n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

   II) $a_n = 4 \cdot n^2 - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

   III) $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 3$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

   IV) $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

   Obtenha os cinco primeiros termos de cada uma dessas sequências e destaque a razão daquelas que forem PAs.

7. Considere que: uma PG é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n...)$, em que cada termo $\mathbf{a_n}$, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação de seu antecedente $\mathbf{a_{n-1}}$ por uma constante diferente de zero. De acordo com essa definição, quais das sequências a seguir são PGs? Justifique sua resposta.

   I) $(1, 3, 9, 27, ...)$;

   II) $(1, 2, 6, 24, ...)$;

   III) $\left(36, 12, 4, \frac{4}{3}, ...\right)$;

   IV) $(1, -2, 4, -8, ...)$;

   V) $\left(3, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, ...\right)$;

   VI) $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, ...)$.

8. Considere as sequências:

I) $a_n = 3 \cdot n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

II) $a_n = 3 \cdot n^2 - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

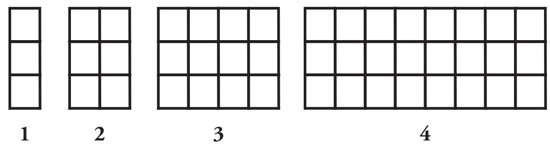
III) $a_n = 3 \cdot n$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

IV) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

V) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Determine os cinco primeiros termos de cada sequência e destaque a razão daquelas que forem PGs ou PAs.

9. Observe a sequência de figuras e responda às questões propostas.



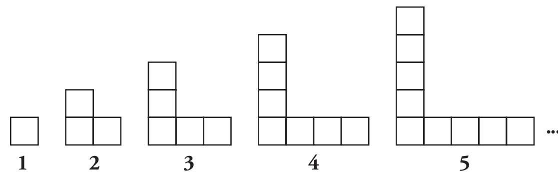
a) Quantos quadradinhos comporão a quinta figura dessa sequência? E a sexta figura?

b) Associe a essa sequência uma outra que indique o número de quadradinhos de cada figura. Essa sequência é uma PG? Justifique.

c) Construa uma fórmula que possa ser utilizada para determinar um termo qualquer dessa sequência. Para auxiliá-lo nessa tarefa, a tabela a seguir organiza os dados, a fim de que as regularidades sejam mais facilmente observadas, elemento necessário à construção da fórmula:

Posição de um termo na sequência	Cálculo	Quantidade de quadradinhos
1	3	3
2	$3 \cdot 2 = 3 \cdot 2^1$	6
3		
4		
...		
n		

10. Nesta figura, cada quadradinho é formado por quatro palitos de comprimentos iguais.



a) A sequência formada pelas quantidades de palitos necessários para a construção das figuras resulta em uma PA? Justifique sua resposta.

b) Quantos palitos serão necessários para a construção da sexta figura? E da sétima?

c) Quantos palitos serão necessários para construir a 78ª figura?

d) Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de palitos da figura que ocupa a posição **n** nessa sequência.

11. Sabe-se que o 9º termo de uma PA de razão 4 é 29. Qual é o 20º termo dessa PA?

12. Sabe-se que a sequência (8, x, –4, y) é uma PA. Determine os valores de **x** e **y**.

LIÇÃO DE CASA

13. Invente uma PA. Separe apenas os termos cuja posição **n** é indicada por um número múltiplo de 6 e forme outra sequência de números. Essa nova sequência também é uma PA? Em caso de resposta afirmativa, determine a razão da PA. Justifique sua resposta.

14. Determine o 8º termo de cada uma das PGs:

I) (1, 3, 9, 27, ...)

II) $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$

15. Determine o 12º termo de uma PG de razão 2, sabendo que o quinto termo dessa sequência é 4.

16. Uma bola é lançada de uma altura de 18 m, e seu impacto no solo provoca saltos sucessivos, de tal forma que, em cada salto, a altura que ela atinge é igual a 80% da altura alcançada no salto anterior. Que altura será alcançada pela bola quando ocorrer o 5º salto? E o 10º salto? (Use uma calculadora.)

17. Dada a PG $\left(\frac{1}{2}, x, 32, y\right)$, determine os valores de **x** e **y**.

18. Suponha que a população de uma cidade tenha uma taxa de crescimento constante e igual a 20% ao ano. No fim do ano 2007, a população era de 50 mil habitantes.

    a) Calcule a população da cidade ao fim de cada um dos quatro anos seguintes e escreva os resultados obtidos em forma de sequência.

b) A sequência obtida é uma PG? Em caso afirmativo, qual é a razão?

c) Encontre uma fórmula que permita calcular a população dessa cidade daqui a **n** anos, contados a partir de 2007.

19. Suponha que o valor de um automóvel diminua a uma taxa constante de 10% ao ano. Hoje, o valor desse automóvel é de R$ 20 mil.

a) Calcule o valor desse automóvel daqui a quatro anos.

b) Encontre uma fórmula que permita calcular o preço desse automóvel daqui a **n** anos.

VOCÊ APRENDEU?

Tratamento das progressões sob o ponto de vista funcional

20. Um conjunto A é formado apenas pelos seguintes elementos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, podemos escrever: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Um conjunto B é formado por elementos numéricos obtidos a partir dos elementos do conjunto A, da seguinte forma: cada elemento de B é 4 unidades a mais do que o triplo do elemento correspondente de A. Dito de outra forma, se chamarmos cada elemento do conjunto A de **n**, e cada elemento do conjunto B de **p**, temos: $p = 4 + 3n$.

a) Quais são os elementos do conjunto B?

b) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto A?

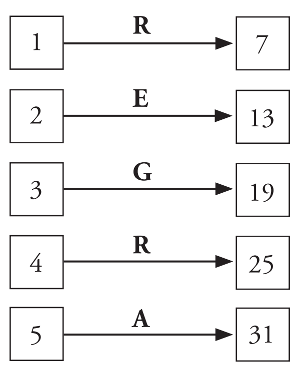
c) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto B?

21. Cada elemento de um conjunto D será obtido a partir de um elemento correspondente do conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, da seguinte forma: $d = -5c + 15$, em que **c** representa um elemento do conjunto C e **d** representa um elemento do conjunto D.

   a) Quais são os elementos do conjunto D?

   b) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto D?

22. Determinada regra matemática "transforma" cada elemento do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...} em outro número, conforme mostra a seguinte representação:



   a) Qual é o resultado associado ao número 6?

   b) Qual é o resultado associado ao número 10?

   c) Se cada elemento do conjunto E for identificado pela letra **n**, e cada resultado for identificado pela letra **p**, qual será a equação matemática que relaciona **p** e **n**?

d) Ordenando os resultados obtidos, qual ocupará a 9ª posição?

e) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto dos resultados?

LIÇÃO DE CASA

23. Na Antiguidade, era muito comum associar adivinhações a problemas matemáticos. Veja este exemplo:

"Quando ia a Bagdá
Encontrei um homem com 7 mulheres
Cada mulher tinha 7 sacos
Cada saco, 7 gatos
Cada gato, 7 gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e mulheres
Quantos iam a Bagdá?"

Escreva uma sequência com os elementos da charada e aponte que tipo de sequência numérica é formada.

24. Um número é chamado de palíndromo quando é o mesmo se lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Assim, os números 55, 121 e 2 002 são palíndromos.

a) Um conjunto A é formado por todos os números palíndromos de dois algarismos. Quais são os elementos de A e qual é o tipo de sequência numérica formada por esses elementos?

b) Um conjunto B é formado por todos os números palíndromos de três algarismos. Observando os elementos do conjunto B, podemos dizer que eles formam uma PA? Justifique sua conclusão.

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3
SOMA DOS TERMOS DE UMA PA OU DE UMA PG FINITAS E APLICAÇÕES À MATEMÁTICA FINANCEIRA

VOCÊ APRENDEU?

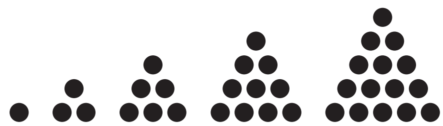
Soma dos termos de uma PA ou de uma PG finitas

1. Calcule a soma dos termos da progressão (10, 16, 22, ..., 70).

2. Calcule a soma dos termos da progressão (13, 20, 27, ...) desde o 21º termo até o 51º.

3. Calcule a soma dos números inteiros, divisíveis por 23, existentes entre 103 e 850.

4. A figura a seguir apresenta os primeiros elementos de uma sequência de números chamados números triangulares.



a) Escreva a sequência numérica correspondente a essa figura, considerando o número de bolinhas que formam cada triângulo:

1, 3, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

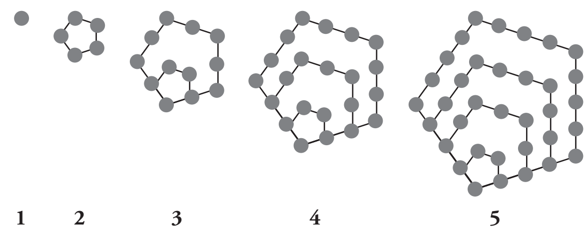
b) Que regularidade você observou na construção desses números triangulares?

c) Escreva uma fórmula que permita calcular um termo qualquer dessa sequência utilizando a recorrência, ou seja, definindo um termo a partir de seu precedente.

d) Construa uma fórmula que calcule um termo qualquer dessa sequência, sem necessariamente recorrer ao termo anterior. Para auxiliá-lo nessa tarefa, você pode organizar os dados na tabela a seguir.

Posição de um termo na sequência	Processo de contagem das bolinhas	Quantidade de bolinhas em cada termo
1		
2		
3		
4		
...		

5. A seguir, estão os primeiros elementos de uma sequência de figuras que representam os chamados números pentagonais.



a) Quantas bolinhas deve ter a sexta figura dessa sequência? E a sétima?

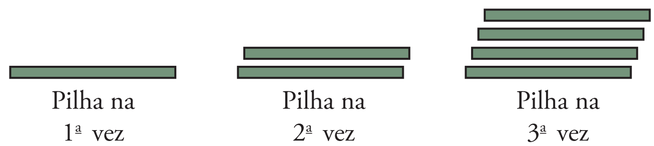
b) Observe as regularidades que existem no processo de construção da Figura 2 a partir da Figura 1, no processo de construção da Figura 3 a partir da Figura 2, e assim por diante. Organize os dados na tabela a seguir e, depois, procure construir uma fórmula que permita determinar a quantidade de bolinhas da Figura **n** nessa sequência.

Posição da figura na sequência	Cálculo	Número de bolinhas

6. Considere a PG (1, 2, 4, 8, ...). Calcule a soma dos 20 primeiros termos dessa PG, deixando indicada a potência.

7. Resolva a equação $2 + 4 + 8 + ... + x = 510$, sabendo que as parcelas do primeiro membro da equação estão em PG.

8. (Vunesp – 2003) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já tiverem sido colocadas anteriormente.



Ao final de nove operações, responda:

a) quantas tábuas terá a pilha?

b) qual será a altura da pilha (em metros)?

9. Uma pessoa compra uma televisão para ser paga em 12 prestações mensais. A primeira prestação é de 50 reais e, a cada mês, o valor da prestação é acrescido em 5% da primeira prestação. Quando acabar de pagar, quanto a pessoa terá pago pela televisão?

10. A primeira parcela de um financiamento de seis meses é de 200 reais, e as demais são decrescentes em 5%. Assim, a segunda parcela é 5% menor do que a primeira, a terceira parcela é 5% menor do que a segunda, e assim por diante. Adotando $0{,}95^5 = 0{,}77$ e $0{,}95^6 = 0{,}73$, calcule:

a) Qual é o valor da última parcela?

b) Quanto aproximadamente terá sido pago quando a dívida for totalmente quitada?

LIÇÃO DE CASA

11. Dada a PA (–4, 1, 6, 11, ...), responda:

a) qual é o termo geral da sequência?

b) qual é a soma dos 12 primeiros termos?

c) qual expressão pode representar o cálculo da soma dos **n** primeiros termos?

12. A soma de **n** termos de uma PA pode ser calculada pela expressão $S_n = 3n^2 - 5n$. Sendo assim, responda:

a) qual é a soma dos seis primeiros termos?

b) qual é a soma dos sete primeiros termos?

c) qual é o sétimo termo?

d) quais são os cinco primeiros termos?

13. Um atleta fora de forma, desejando recuperar o tempo perdido, planeja correr, diariamente, uma determinada distância de maneira que, a cada dia, a distância percorrida aumente 20% em relação ao que foi percorrido no dia anterior. Se ele correr 10 quilômetros no primeiro dia:

a) quantos quilômetros correrá no quarto dia?

b) quantos quilômetros terá percorrido em dez dias? (**Observação**: $1{,}2^{10} \cong 6{,}2$.)

Leitura e análise de texto

Aplicações na Matemática Financeira

O crescimento de um capital a uma taxa constante de juros simples se caracteriza por envolver uma série de termos que formam uma PA. Por outro lado, no cálculo do crescimento de um capital a uma taxa constante de juros compostos, aparece uma PG. No exemplo a seguir, podemos comparar a evolução de um capital inicial quando submetido a juros simples e a juros compostos.

VOCÊ APRENDEU?

14. Complete:

Tabela A

Capital = C

Taxa de juros = 5% ao mês

	Evolução do capital a juros simples	**Evolução do capital a juros compostos**
Inicial	**C**	**C**
Depois de um mês	**$1{,}05 \cdot C$**	**$1{,}05 \cdot C$**
Depois de dois meses	**$1{,}10 \cdot C$**	**$1{,}05^2 \cdot C$**
Depois de três meses		
Depois de quatro meses		

15. Suponha que um cidadão aplique mensalmente, durante 8 meses, uma quantia fixa de 200 reais a juros simples de 5%. Ao final, depois dos 8 meses de aplicação, quanto terá acumulado essa pessoa? A tabela de capitalização a seguir pode ajudá-lo a organizar o método de resolução:

Tabela B

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Final
Capital	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200					
					200				
						200			
							200		
								200	

16. Em relação ao problema anterior, alterando apenas a forma de incidência da taxa de juros, de simples para compostos, pode-se construir a **Tabela C**, que precisa ser completada:

Tabela C

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Final
Capital	200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$	$200 \cdot 1{,}05^8$
		200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$
			200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$
				200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$
					200				
						200			
							200		
								200	

17. Uma financeira remunera os valores investidos à base de 4% de juros simples. Quanto conseguirá resgatar nesse investimento uma pessoa que depositar, mensalmente, 500 reais durante 10 meses?

18. Laura aderiu a um plano de capitalização de um banco, depositando, mensalmente, mil reais durante 12 meses. Se o banco promete remunerar o dinheiro aplicado à taxa de 2% de juros compostos ao mês, calcule quanto Laura resgatará ao final do período. (**Observação**: $1{,}02^{12} = 1{,}27$.)

19. Carlos deseja comprar um automóvel que custará, daqui a dez meses, R$ 15 500,00. Para atingir seu objetivo, Carlos resolveu depositar uma quantia **x** em um investimento que promete remunerar o dinheiro aplicado à razão de 10% de juros simples ao mês. Qual deve ser o valor mínimo de **x** para que Carlos consiga comprar o automóvel ao final dos dez meses?

20. Uma geladeira cujo preço à vista é de R$ 1 500,00 será financiada em seis parcelas mensais fixas. Se os juros compostos cobrados no financiamento dessa geladeira são de 3% ao mês, qual é o valor da parcela mensal? (**Observação**: $1{,}03^6 = 1{,}19$.)

LIÇÃO DE CASA

21. Julia guardou, mensalmente, 200 reais em um banco que remunerou seu dinheiro à base de 4% ao mês de juros compostos. Ao final de 8 meses de aplicação, Julia usou o dinheiro que havia guardado para dar de entrada em um pacote de viagem que custava, à vista, R$ 5 mil. Julia pretende financiar o saldo devedor em 5 vezes, em parcelas iguais e fixas, à taxa de 2% ao mês. (**Observação**: $1{,}04^8 \cong 1{,}37$; $1{,}02^5 \cong 1{,}10$.)

a) Quanto Julia deu de entrada no pacote de viagem?

b) Qual é o valor da parcela mensal fixa do financiamento do saldo do pacote de viagem?

PESQUISA INDIVIDUAL

A história do jogo de xadrez é um exemplo bastante interessante de como nossa percepção pode ser enganada quando somamos um grande número de termos de uma sequência. Faça uma pesquisa sobre essa história. Você pode recorrer a *sites* de busca ou ao livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan.

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 4
LIMITE DA SOMA DOS INFINITOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Leitura e análise de texto

Na Grécia antiga, a contraposição entre discreto e contínuo já trazia alguns problemas de interpretação. Para os pitagóricos, o número era a referência de toda dúvida e toda dificuldade. Segundo eles, se não fosse pelo número e por sua natureza, nada do que existe poderia ser compreendido por alguém, nem em si mesmo, nem com relação a outras coisas. Os números constituíam o verdadeiro elemento de que era feito o mundo. Chamavam um ao ponto, dois à linha, três à superfície e quatro ao sólido. A partir de Um, Dois, Três e Quatro, podiam construir um mundo.

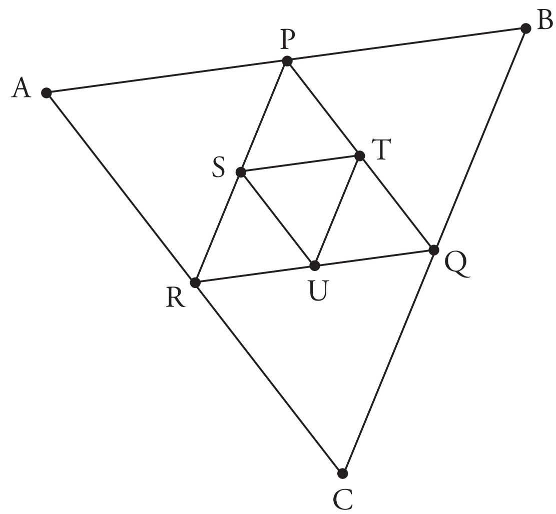
A concepção geométrica dos gregos do século V a.C., influenciada pela visão dos pitagóricos, entendia que o número de pontos de uma linha determinada seria finito, muito embora não fosse possível quantificá-los. Em outras palavras, a noção do contínuo não fazia parte das ideias geométricas de então. Essa concepção de uma série de pontos justapostos, como uma grande fila, de maneira que qualquer segmento pudesse ser mensurável, quantificado como uma determinada quantidade de pontos, caiu por terra a partir da descoberta da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.

Para refletir:

Dentre os conjuntos numéricos que você já estudou, qual deles nos permite representar grandezas contínuas?

Desafio!

O triângulo ABC da figura a seguir é equilátero de lado 1 u. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.



a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ?

b) Qual é o perímetro dos triângulos ABC, PQR e STU?

c) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e de mais outros dois triângulos construídos segundo o mesmo critério.

VOCÊ APRENDEU?

1. Por mais que aumentemos o número de termos na adição

$$S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots,$$

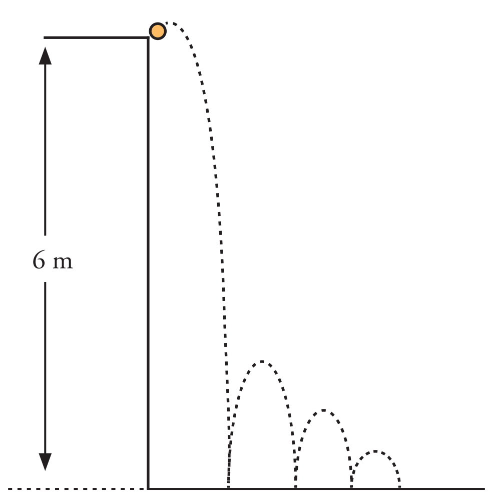
existirá um valor limite, isto é, um valor do qual a soma se aproxima cada vez mais, sem nunca atingi-lo? Qual é esse valor?

2. Calcule o resultado limite das seguintes somas:

a) $S = -10 + 1 - 0{,}1 + 0{,}01 - 0{,}001 + 0{,}0001 - \ldots$

b) $S = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \cdots$

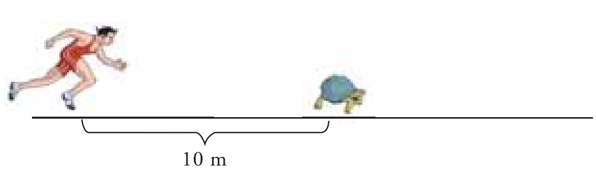
3. Uma bola de borracha cai da altura de 6 m, bate no solo e sobe até a terça parte da altura inicial. Em seguida, a bola cai novamente, bate no solo, inverte o sentido de movimento, e sobe até atingir a terça parte da altura anterior. Continuando seu movimento segundo essas condições, isto é, atingindo, após cada batida, a terça parte da altura que atingiu após a batida imediatamente anterior, qual será a distância vertical total percorrida pela bola até parar?



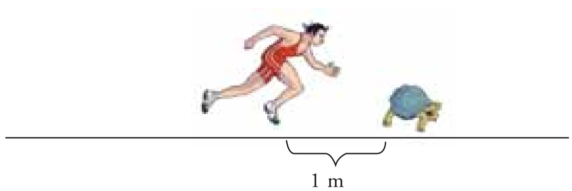
4. Resolva a equação em que o primeiro termo da igualdade é o limite da soma dos termos de uma PG infinita: $\frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{x}{32} + ... = 18$.

LIÇÃO DE CASA

5. (Adaptado do *Paradoxo de Zenão*) Uma corrida será disputada entre Aquiles, grande atleta grego, e uma tartaruga. Como Aquiles é dez vezes mais rápido do que a tartaruga, esta partirá 10 m à frente de Aquiles, conforme representado no esquema a seguir.



Quando Aquiles chegou ao ponto em que a tartaruga estava inicialmente, depois de percorrer 10 m, a tartaruga, dez vezes mais lenta, estava 1 m à frente.



Aquiles, então, correu 1 m, até o ponto em que a tartaruga estava, mas ela já não estava mais lá: estava 10 cm à frente, pois correu, no mesmo intervalo de tempo, dez vezes menos que Aquiles, e a décima parte de 1 m corresponde a 10 cm.

Repetindo esse raciocínio para os intervalos de tempo seguintes, parece que Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois ela sempre terá percorrido $\frac{1}{10}$ do que Aquiles percorrer. Será mesmo verdade que ele nunca alcançará a tartaruga?

a) Escreva a sequência das distâncias que Aquiles percorre até chegar ao ponto em que a tartaruga estava a cada vez.

b) A sequência das distâncias é uma PG. Qual é a razão dessa PG?

c) Calcule a soma das infinitas distâncias percorridas por Aquiles até chegar ao ponto em que se encontrava a tartaruga a cada vez.

d) Quantos metros percorrerá Aquiles até alcançar a tartaruga? Ou você acha que ele não a alcançará?

6. Escreva a expressão $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}...$ como um produto de potências de dois e, em seguida, encontre o valor da expressão.

7. Uma dívida foi paga, mensalmente, da seguinte maneira:

1º mês: metade do valor inicial da dívida;

2º mês: metade do valor restante após o pagamento da parcela anterior;

3º mês: metade do valor restante após o pagamento da parcela anterior;

4º mês: metade do valor restante após o pagamento da parcela anterior;

e assim sucessivamente, até a quitação total da dívida.

Verifique que a soma das parcelas pagas corresponde ao valor total da dívida.

8. Determine a geratriz da dízima 1,777...

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 5
FUNÇÕES COMO RELAÇÕES DE INTERDEPENDÊNCIA: MÚLTIPLOS EXEMPLOS

Leitura e análise de texto

Grandezas e funções

A altura de uma árvore que plantamos no quintal ao longo do tempo, o peso de uma pessoa ao longo de sua vida, o preço do barril de petróleo a cada dia, a produção de automóveis de um país ano após ano, a temperatura de um refrigerante colocado em uma geladeira, o preço a pagar por uma corrida de táxi são alguns exemplos de grandezas.

Duas grandezas **x** e **y** podem variar de modo interdependente, de tal forma que assumam valores inter-relacionados. Quando, deixando variar livremente os valores de uma grandeza **x**, notamos que os valores de outra grandeza **y** também variam, de tal forma que a cada valor de **x** corresponde a um e somente um valor de **y**, então dizemos que **y** é uma função de **x**; dizemos ainda que **x** é a variável independente e **y** é a variável dependente. Por exemplo:

a) a área **A** de um quadrado é uma função de seu lado **x**; se os valores de **x** variarem livremente (naturalmente, **x** não pode assumir valores negativos), então os valores de **A** variarão em função de **x**, portanto, $A = f(x)$. Nesse caso, temos: $A = f(x) = x^2$;

b) a altura **H** de uma pessoa é uma função de sua idade **t**; podemos escrever $H = f(t)$, pois a cada valor de **t** corresponde um único valor de **H**. No caso, não sabemos exprimir a relação de interdependência $f(t)$ por meio de uma fórmula.

Quando **x** e **y** são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultânea e proporcionalmente, ou seja, a razão $\frac{y}{x}$ é constante, resultando em $y = k \cdot x$ (**k** é uma constante). Quando **x** e **y** são duas grandezas inversamente proporcionais, sempre que uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa, de modo que o produto das duas permanece constante: $x \cdot y = k$, ou seja, $y = \frac{k}{x}$, onde **k** é uma constante não nula.

Quando observamos os valores de duas grandezas interdependentes, **x** e **y**, e notamos que um aumento no valor de **x** acarreta um aumento no valor de **y**, ou, então, um aumento no valor de **x** provoca uma diminuição no valor de **y**, somos tentados a dizer que **x** e **y** variam de modo diretamente proporcional, no primeiro caso, ou inversamente proporcional, no segundo. Entretanto, tais afirmações nem sempre são corretas, uma vez que, como visto anteriormente, a proporcionalidade direta exige mais do que um aumento simultâneo nos valores de **x** e **y**; pois é preciso que a razão $\frac{y}{x}$ seja constante e resulte em $y = kx$ (**k** é uma constante). Do mesmo modo, a proporcionalidade inversa é mais do que uma diminuição nos valores de uma das grandezas quando o outro aumenta; em outras palavras, é necessário que o produto dos valores de **x** e **y** permaneça constante, ou seja, $x \cdot y = k$ (**k** é constante).

VOCÊ APRENDEU?

1. Em cada um dos casos apresentados a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade. Se existir, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade. Em caso negativo, justifique sua resposta.

a) A altura **a** de uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade **t**?

b) A massa **m** de uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade **t**?

c) O perímetro **p** de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado **a**?

d) A diagonal **d** de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado **a**?

e) O comprimento **C** de uma circunferência é diretamente proporcional ao seu diâmetro **d**?

2. As tabelas a seguir relacionam pares de grandezas. Indique se existe ou não proporcionalidade (direta ou inversa).

a) Produção de automóveis e produção de tratores (anual, em milhares).

Países	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Automóveis	100	150	200	225	250	300	350	400	450
Tratores	8	12	16	18	20	24	28	32	36

b) Área destinada à agricultura e área destinada à pecuária (em 1 000 km^2).

Países	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Agricultura	80	100	110	120	150	160	180	200	250
Pecuária	60	70	80	98	100	124	128	132	136

c) Produto Interno Bruto (PIB, em milhões de dólares) e Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

Países	A	B	C	D	E	F	G	H	I
PIB	300	400	510	620	750	760	880	1 000	1 100
IDH	0,90	0,92	0,80	0,88	0,78	0,89	0,91	0,80	0,86

d) Expectativa de vida (em anos) e índice de analfabetismo (percentual da população).

Países	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Expectativa de vida	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Índice de analfabetismo	11	10	9	8	7	6	5	4	3

3. Um prêmio **P** da loteria deve ser dividido em partes iguais, cabendo um valor **x** a cada um dos **n** ganhadores. Considerando um prêmio **P** de R$ 400 mil, preencha a tabela a seguir e expresse a relação de interdependência entre **x** e **n**.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**8**	**10**	**20**
x								

4. Para cortar a grama de um canteiro quadrado de 5 m de lado, um jardineiro cobrou 20 reais. Mantida a proporção, para cortar a grama de um canteiro quadrado de 15 m de lado, quanto o jardineiro deverá cobrar? A quantia a cobrar **C** é diretamente proporcional à medida **x** do lado do canteiro quadrado?

LIÇÃO DE CASA

5. A tabela a seguir relaciona os valores de três grandezas, **x**, **y** e **z**, que variam de modo inter-relacionado:

x	1	3	4	5	10	15	40	50	150
y	7	21	28	35	70	105	280	350	1 050
z	300	100	75	60	30	20	7,5	6	2

Verifique se os diversos pares de grandezas (**x** e **y**, **y** e **z**, **x** e **z**) são direta ou inversamente proporcionais. Justifique sua resposta.

6. Quando uma pedra é abandonada em queda livre (sem considerar a resistência do ar ao movimento), a distância vertical **d** que ela percorre em queda é diretamente proporcional ao quadrado do tempo **t** de queda, ou seja, $d = k \cdot t^2$. Considere que, após 1 segundo de queda, a pedra caiu 4,9 m e, então, responda:

   a) qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?

   b) qual será a distância vertical percorrida após 5 segundos?

   c) quanto tempo a pedra levará para cair 49 metros?

VOCÊ APRENDEU?

Gráficos de funções

7. O valor a ser pago por uma pessoa para abastecer com combustível seu automóvel varia proporcionalmente em função da quantidade de litros de combustível utilizada. Isso significa dizer que o preço é uma **função** da quantidade de litros de combustível que abastece o automóvel. Vamos imaginar que o litro da gasolina custe R$ 2,50. Denotando por **P** o preço a ser pago e por **ℓ** a quantidade de litros de gasolina com que um automóvel é abastecido, pede-se:

a) Complete a tabela a seguir, que relaciona **P** com **ℓ**.

ℓ	0	1	2	3	4	6
P						

b) Qual é o preço a ser pago quando se abastece o carro com 10 litros?

c) Calcule a diferença entre os preços a serem pagos quando se abastece um carro com 15 e 16 litros.

d) Observando a tabela, concluímos que **P** e **ℓ** são grandezas diretamente proporcionais, isto é, $\frac{P}{\ell}$ = constante = k, ou seja, $P = f(\ell) = k \cdot \ell$. Determine o valor de **k**.

e) Na função $y = f(x)$, o conjunto de pontos (x,y) do plano cartesiano em que $y = f(x)$ constitui o gráfico da função. Construa, em um plano cartesiano, o gráfico da função $P = f(\ell)$.

PESQUISA INDIVIDUAL

8. As funções na forma $y = f(x) = kx$ representam situações em que estão envolvidas duas grandezas, **x** e **y**, diretamente proporcionais. Elabore quatro situações distintas envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais e construa seus respectivos gráficos cartesianos. Com base em sua observação a respeito dos gráficos, mostre o que eles têm em comum.

9. Fixada a temperatura **T**, a pressão **P** e o volume **V** de um gás, pode-se dizer que eles variam segundo a sentença $P \cdot V = k$ (**k** é uma constante). Faça uma pesquisa sobre essa relação e esboce o gráfico de **P** em função de **V**.

(**Dica**: você poderá pesquisar sobre esse assunto em livros de Química.)

VOCÊ APRENDEU?

10. O preço **P** a ser cobrado em uma corrida de táxi é composto por uma quantia **a** fixada, igual para todas as corridas, mais uma parcela variável, que é diretamente proporcional ao número **x** de quilômetros rodados: $P = a + bx$ (**b** é o custo de cada quilômetro rodado).

Em certa cidade, temos $P = 15 + 0{,}8x$ (**P** em reais e **x** em quilômetros).

a) Qual será o preço a ser cobrado por uma corrida de 12 km?

b) Calcule a diferença entre os preços de duas corridas, uma de 20 km e outra, de 21 km.

c) Esboce o gráfico de **P** em função de **x**.

11. Na casa de uma família que gasta cerca de 0,5 kg de gás de cozinha por dia, a massa de gás **m** contida em um botijão doméstico de 13 kg varia com o tempo de acordo com a fórmula $m = 13 - 0{,}5t$, onde **t** é o tempo em dias.

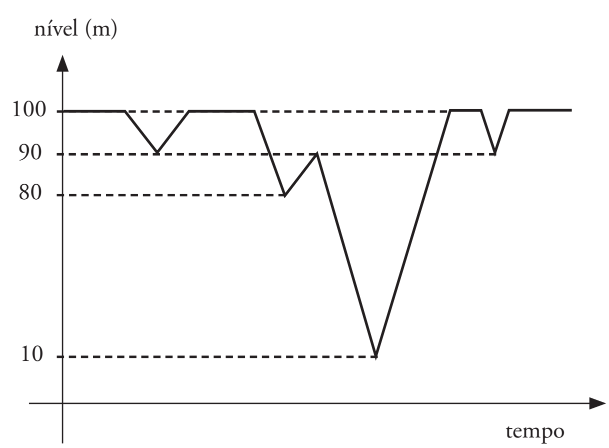
a) Calcule o número de dias necessários para um consumo de 6 kg de gás.

b) Calcule a massa de gás que resta em um botijão após 10 dias de uso.

c) Esboce o gráfico de **m** em função de **t**.

LIÇÃO DE CASA

12. O gráfico a seguir mostra o nível da água armazenada em uma barragem ao longo de um ano. Analise atentamente o gráfico e responda às questões a seguir.



a) Qual foi o menor nível de água armazenada na barragem? E o maior?

b) Quantas vezes no ano a barragem atingiu o nível de 40 m? E o nível de 95 m?

13. O número **N** de dias necessários para esvaziar um reservatório de água de 20 000 litros depende do consumo diário de água. Se o consumo for de **x** litros por dia, então os valores de **N** e **x** devem satisfazer à condição $N \cdot x = 20\,000$.

a) Calcule os valores de **N** para $x_1 = 500\ \ell$ por dia e para $x_2 = 800\ \ell$ por dia.

b) Esboce o gráfico de **N** em função de **x**.

14. Considere duas grandezas, **x** e **y**, diretamente proporcionais. Sabe-se que o ponto (4,12) pertence ao gráfico da função que relaciona essas grandezas.

a) Escreva a sentença que relaciona **x** e **y**.

b) Construa o gráfico dessa função.

c) Qual é o valor de f(–2)?

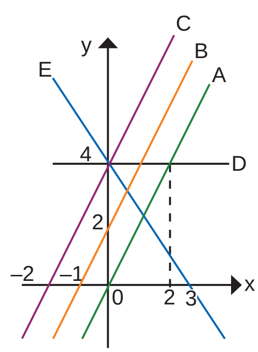
O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 6
FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º GRAU: SIGNIFICADO, GRÁFICOS, CRESCIMENTO, DECRESCIMENTO E TAXAS

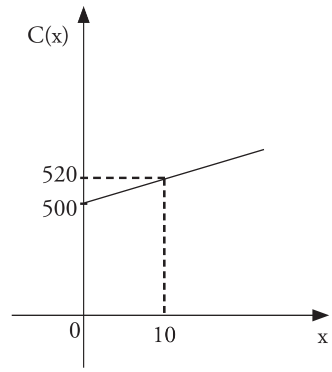
VOCÊ APRENDEU?

Funções polinomiais de 1º grau: significado

1. Sempre que expressamos por meio de variáveis uma situação de interdependência envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais, chegamos a uma função de 1º grau. De modo geral, uma função de 1º grau é expressa por uma fórmula do tipo **f(x) = ax + b**, onde **a** e **b** são constantes, sendo a ≠ 0. Convém ressaltar que uma função de 1º grau em que b = 0 representa uma proporcionalidade direta entre **f(x)** e **x**, pois f(x) = ax. Quando b ≠ 0, a diferença f(x) – b é diretamente proporcional a **x**, pois f(x) – b = ax. As retas **A**, **B**, **C**, **D** e **E** são os gráficos de funções do tipo **f(x) = ax + b**. Determine os valores de **a** e **b** em cada um dos cinco casos apresentados e indique o(s) que representa(m) a variação de grandezas diretamente proporcionais.



2. O gráfico a seguir mostra a relação entre a quantidade **x** de litros de xampu produzida e o custo C(x), em reais, da produção caseira.



a) Qual é o possível motivo de um gasto de 500 reais quando ainda não se está produzindo xampu?

b) Qual é a função C(x) = ax + b representada no gráfico? Essa sentença da interdependência entre o custo **C** e a quantidade produzida **x** é válida para qualquer valor de **x**?

c) Qual é o gasto para se produzir 1 500 litros de xampu?

d) Quantos litros de xampu podem ser produzidos com R$ 10 mil?

e) Qual é a variação no gasto para a produção de cada litro adicional de xampu?

3. As funções de custos simples para um negócio consistem em duas partes: o custo fixo, cujo valor é independente de quantas unidades de certo produto são produzidas (exemplo: aluguel), e os custos variáveis, que dependem do número de produtos produzidos. Considerando C(x) o custo total da produção de um número **x** de produtos, CF(x) o custo fixo e CV(x) o custo variável, podemos escrever que **C = CF + CV**. Suponha que, para uma fotocopiadora, o custo por cópia reproduzida seja de 5 centavos e que o custo fixo de seu negócio seja de R$ 2 mil.

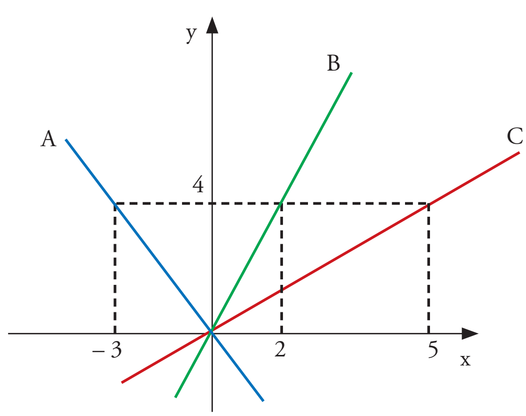
a) Escreva a expressão relativa ao custo fixo, **CF**.

b) Escreva a sentença que relaciona **CV** e **x**.

c) Escreva a sentença que relaciona **C** e **x**.

d) Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos de cada função apresentada nos itens anteriores.

4. As retas **A**, **B** e **C** são representações gráficas da função f(x) = mx, que é um caso particular da função f(x) = mx + n, com n = 0. Determine o valor de **m**, em cada um dos três casos, no espaço a seguir.



5. Analisando as funções obtidas na atividade anterior, responda:

a) As funções **f(x) = mx** que têm como gráficos as retas **B** e **C** possuem m > 0. Em casos assim, quanto maior o valor de **m**, a reta estará mais "em pé" ou mais "deitada"?

b) Como podemos saber se uma reta está inclinada para a direita ou para a esquerda apenas observando o valor de **m** na sua equação?

6. A conta de certo almoço em um restaurante é composta pelo valor total das despesas com comida e bebida, mais 10% sobre esse valor, que correspondem aos gastos com serviços, além de uma taxa fixa de 10 reais de *couvert* artístico para os músicos.

a) Chamando de **x** os gastos com comida e bebida (em reais) e de **y** o valor total da conta (em reais), determine uma sentença do tipo y = mx + n que represente a relação entre **x** e **y**.

b) Faça um gráfico no plano cartesiano para representar a função encontrada no item anterior.

7. A empresa Negócios da China S.A. tem um custo diário de 200 reais com salários e manutenção. Cada item produzido custa 2 reais e é vendido a 5 reais.

a) Escreva a sentença matemática que relaciona o custo diário de produção **C** para **x** itens produzidos.

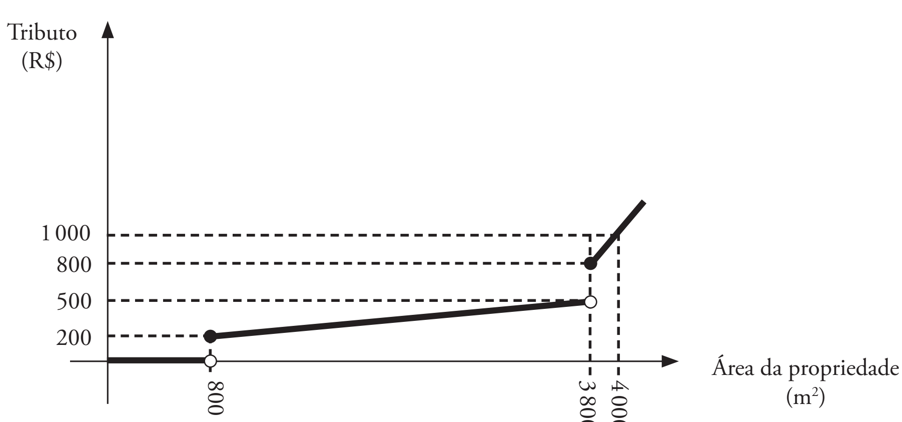
b) A receita **R** da empresa representa o dinheiro recolhido pela venda de seus produtos. Escreva a sentença matemática que relaciona a receita **R** para **x** itens produzidos.

c) Construa, em um mesmo plano, os gráficos das funções custo **C** e receita **R**.

d) O ponto de interseção entre os gráficos de **R** e **C**, em Economia, chama-se "ponto de equilíbrio", isto é, quando o custo e a receita são iguais: **R = C**.

Encontre o ponto de equilíbrio dessa empresa, ou seja, a quantidade de produtos que devem ser produzidos diariamente para garantir que não haja prejuízo. Analise o gráfico e indique esse ponto.

8. O gráfico a seguir indica o valor de um determinado tributo territorial em função da área de uma propriedade.



a) Qual é o valor do imposto a ser pago por uma propriedade de 800 m^2?

b) Existe algum tamanho de propriedade (em m^2) cujo imposto cobrado seja exatamente 500 reais?

c) Determine uma sentença do tipo $y = mx + n$, com **y** sendo o tributo em reais, e **x** a área em m^2, válida para o intervalo $800 \leq x < 3\,800$.

Desafio!

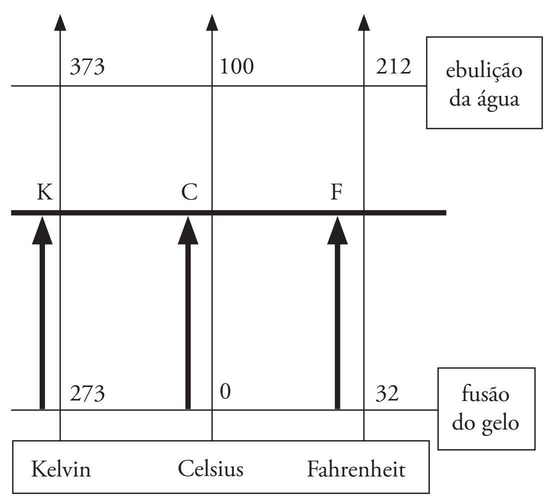
Analise a situação da atividade 8, apresentada na seção Você aprendeu?, para o intervalo $x \geq 3\,800$. Com base no gráfico, é verdadeira a afirmação de que a intenção desse tributo territorial é cobrar mais imposto por m^2 para propriedades maiores do que 3 800 m^2?

LIÇÃO DE CASA

9. Celsius, Fahrenheit e Kelvin são as três escalas de temperatura mais utilizadas. Sendo **C** o valor da temperatura em graus Celsius, **F** a mesma temperatura medida em graus Fahrenheit e **K**, a temperatura em Kelvin, para converter uma temperatura de uma escala para outra, considere os seguintes fatos fundamentais:

- nas escalas Celsius e Kelvin, o "tamanho" do grau é o mesmo, havendo apenas um deslocamento da origem: na escala Celsius é no 0, e na escala Kelvin é no 273;
- na escala Celsius, a temperatura de fusão do gelo é 0º e a de ebulição da água é 100º;
- na escala Fahrenheit, a temperatura de fusão do gelo é 32º e a de ebulição da água é 212º.

Com base nessas informações:



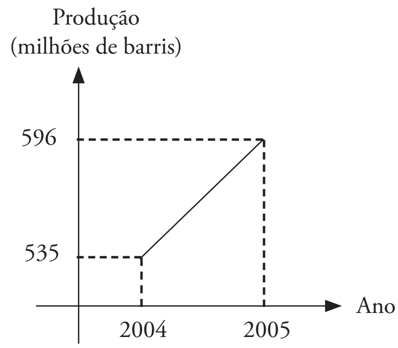
a) Demonstre que, para se transformar uma temperatura dada em graus Celsius para graus Kelvin, a regra é K = C + 273.

b) Demonstre que, para se transformar uma temperatura apresentada em graus Celsius para graus Fahrenheit, a regra é $F = 1,8C + 32$.

c) Calcule a quantos graus Celsius corresponde uma temperatura de 95 °F.

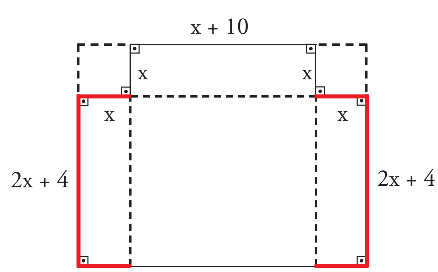
d) Calcule a quantos graus correspondem 300 K na escala Fahrenheit.

10. O gráfico a seguir indica a produção brasileira de petróleo, em milhões de barris, nos anos de 2004 e 2005:



Admitindo que a taxa de crescimento do período 2004-2005 se manteve no período 2005-2006, calcule o valor aproximado da produção média anual, em milhões de barris, no ano de 2006.

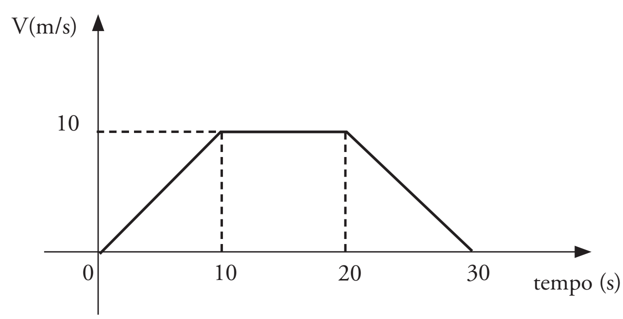
11. A figura a seguir ilustra uma folha de latão que será usada na montagem de uma peça:



a) Determine todos os valores possíveis de **x** (em metros) para que o perímetro da folha seja maior ou igual a 64 metros.

b) Determine todos os valores possíveis de **x** (em metros) para que a soma dos comprimentos representados em vermelho seja menor que a soma dos demais comprimentos que completam o perímetro da folha.

12. A velocidade **V** de um carro varia conforme o gráfico a seguir:



Escreva as três sentenças matemáticas que representam a velocidade do carro em função do tempo como descrito no gráfico apresentado.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 7
FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU: SIGNIFICADO, GRÁFICOS, INTERSEÇÕES COM OS EIXOS, VÉRTICES E SINAIS

Leitura e análise de texto

Grandeza proporcional ao quadrado de outra: a função de 2º grau $f(x) = ax^2$

É possível obter um exemplo da relação de interdependência entre duas grandezas **x** e **y** em que **y** é diretamente proporcional ao quadrado de **x**, isto é, $\frac{y}{x^2}$ = constante = k, ou seja, $y = kx^2$, quando uma pedra é abandonada em queda livre. A distância vertical **d** que a pedra percorre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo de queda, ou seja, temos $d = kt^2$; sendo, neste caso, o valor de k = 4,9 (metade da aceleração da gravidade do local).

De modo geral, a relação $y = kx^2$ serve de base para iniciar o estudo das funções de 2º grau, cuja forma geral é $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Este será o tema desta Situação de Aprendizagem. Acompanhe, atentamente, as discussões propostas pelo seu professor.

VOCÊ APRENDEU?

1. Construa, no espaço a seguir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das seguintes funções **a**, **b**, **c** e **d**, e, em outro plano, os gráficos das funções **e**, **f**, **g** e **h**.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = 10x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{10}x^2$

e) $f(x) = -x^2$

f) $f(x) = -2x^2$

g) $f(x) = -10x^2$

h) $f(x) = -\frac{1}{10}x^2$

Tome nota!

Procure esboçar os gráficos comparando uns aos outros, sem necessariamente recorrer a tabelas com valores de **x** e de **y**. Em vez disso, leve em consideração os valores relativos aos coeficientes de $\mathbf{x^2}$.

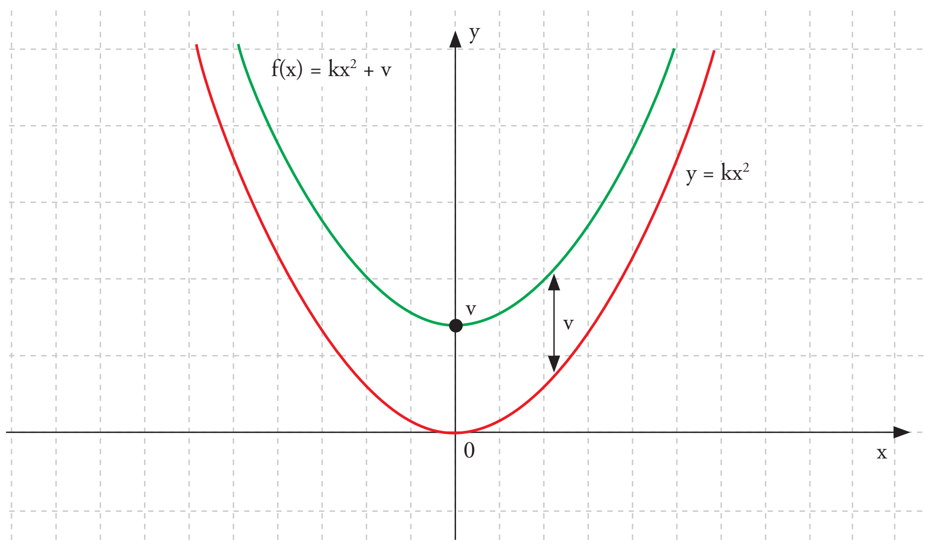
Desafio!

Mostre que a curva do gráfico de $f(x) = x^2$ não tem um "bico" na origem do sistema de coordenadas, ou seja, ela apenas tangencia o eixo **x**.

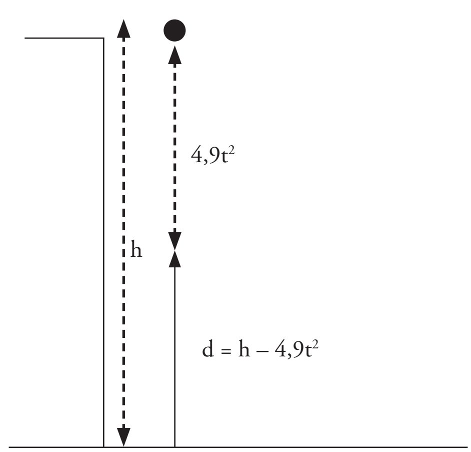
Deslocamentos verticais: a função $f(x) = ax^2 + v$

Quando a proporcionalidade entre **y** e $\mathbf{x^2}$ ocorre a partir de um valor inicial **v**, então $y - v = kx^2$, ou seja, $y = kx^2 + v$.

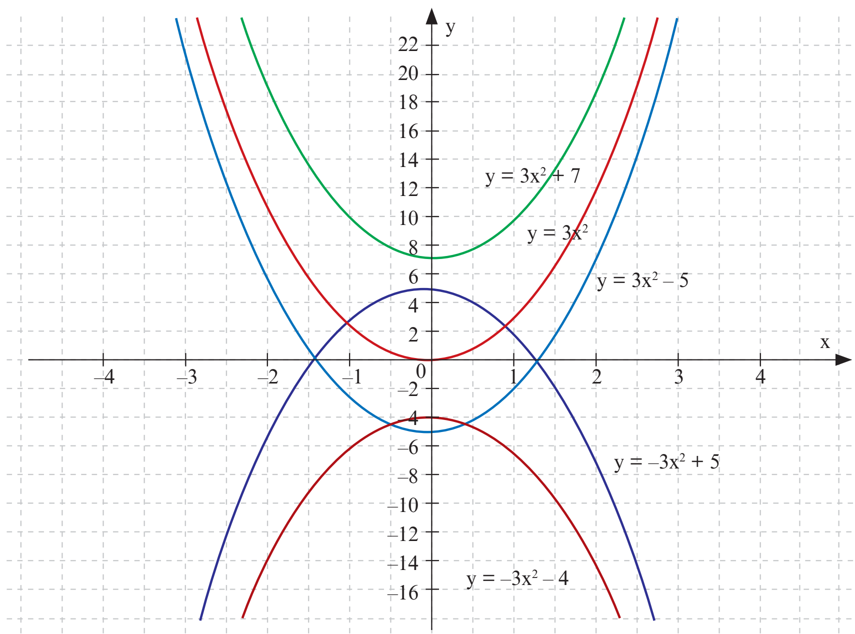
Nesses casos, o gráfico de $f(x) = kx^2 + v$ continua a ser uma parábola, mas seus pontos são deslocados, em relação ao conhecido gráfico de $y = kx^2$, na direção do eixo **y** de um valor **v**: para cima, se $v > 0$, ou para baixo, se $v < 0$.



Uma situação como esta ocorre, por exemplo, quando calculamos a distância **d** de uma pedra abandonada a certa altura **h** até o solo:



Neste caso, temos, então, d = h – 4,9t², ou seja, h – d = 4,9t². Podemos observar, a seguir, alguns gráficos de funções desse tipo.



2. Construa os gráficos das funções **a**, **b**, **c** e **d** em um mesmo plano cartesiano e os gráficos das funções **e**, **f** e **g** em outro plano cartesiano, indicando, em cada caso, as coordenadas do vértice.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 - 3$

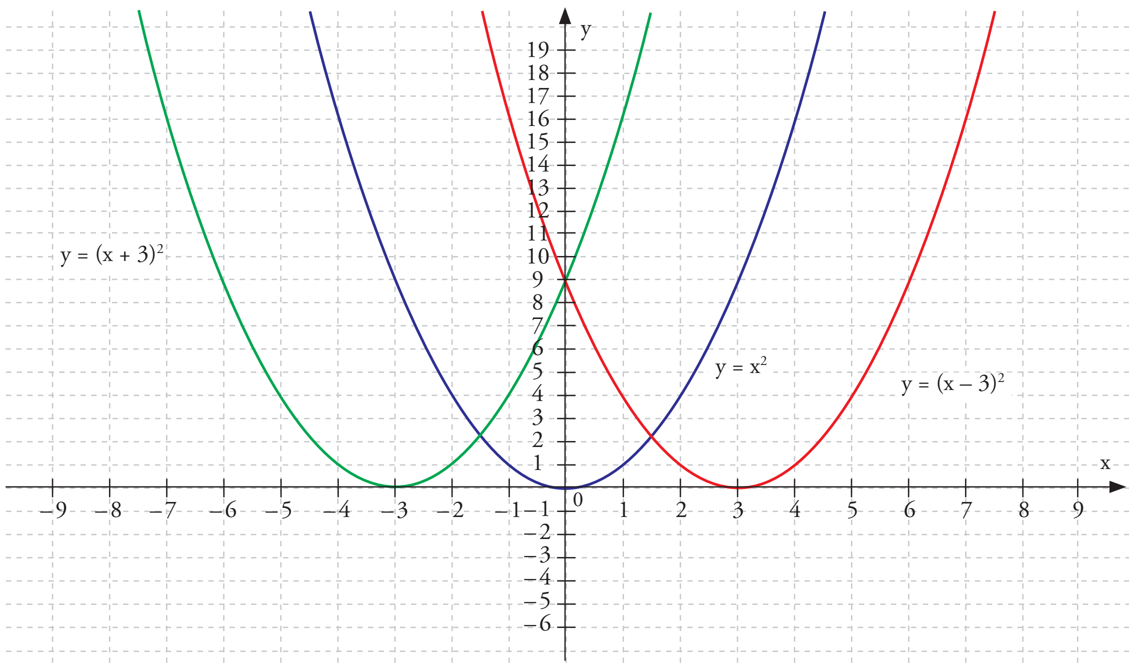
e) $f(x) = -2x^2 + 1$

f) $f(x) = -3x^2 - 5$

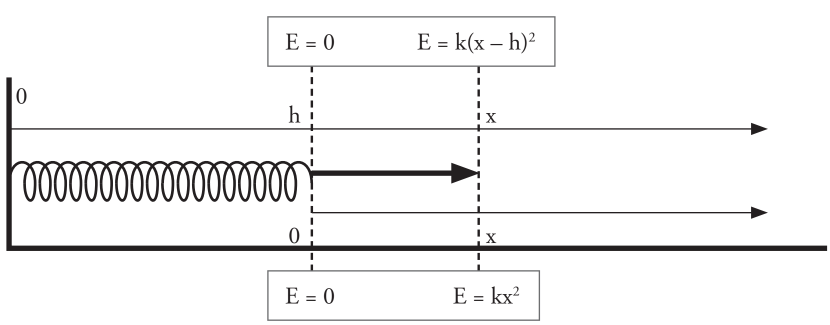
g) $f(x) = -0{,}5x^2 + 7$

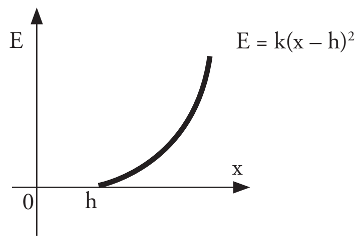
Deslocamentos horizontais: a função $f(x) = a(x - h)^2$

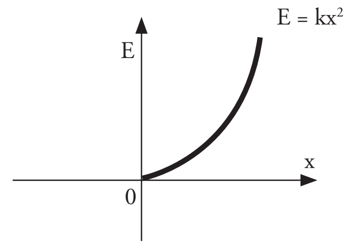
Outra proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra grandeza ocorre quando temos **y** diretamente proporcional não a $\mathbf{x^2}$, mas a $(x - h)^2$. Neste caso, temos $y = k(x - h)^2$ e o gráfico correspondente é análogo ao de $y = kx^2$, deslocado horizontalmente de **h** unidades, para a direita, se $h > 0$, ou para a esquerda, se $h < 0$.



Um exemplo de situação semelhante àquela apresentada anteriormente ocorre quando a grandeza **y** é diretamente proporcional ao quadrado da variação no valor de **x** a partir de certo valor inicial **h**. Por exemplo, sendo **E** a energia elástica armazenada em uma mola distendida de **x** unidades a partir de seu comprimento normal, então $E = kx^2$; naturalmente, se $x = 0$, então $E = 0$. Entretanto, se a escala para medir a distensão da mola é tal que temos $E = 0$ para $x = h$, então, quando a mola estiver distendida de $(x - h)$, sua energia **E** será tal que $E = k(x - h)^2$.







3. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções **a**, **b**, **c** e **d** e, em outro plano cartesiano, os gráficos das funções **e**, **f** e **g**, indicando as coordenadas do vértice de cada uma delas.

a) $f(x) = (x + 1)^2$

b) $f(x) = (x + 3)^2$

c) $f(x) = (x - 1)^2$

d) $f(x) = (x - 3)^2$

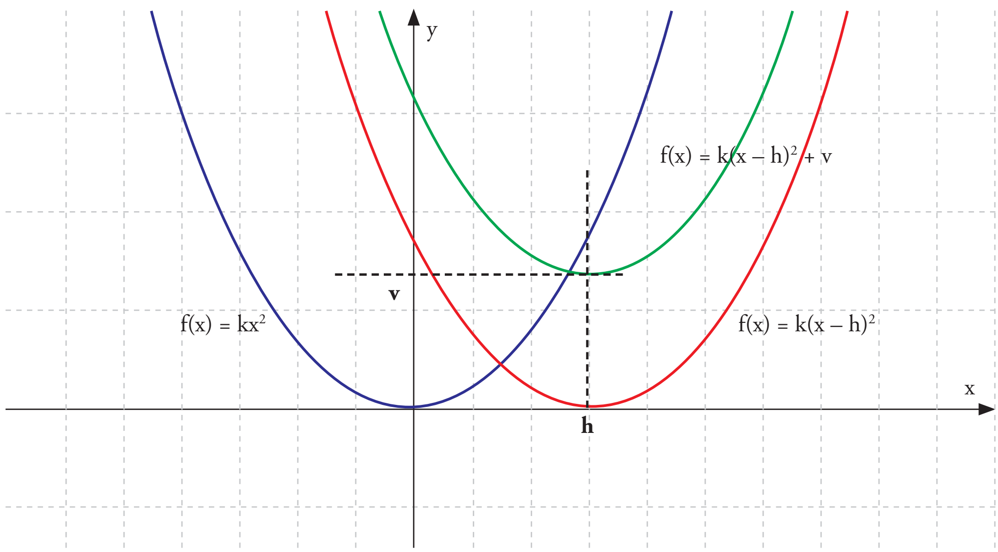
e) $f(x) = -(x - 5)^2$

f) $f(x) = -2(x + 3)^2$

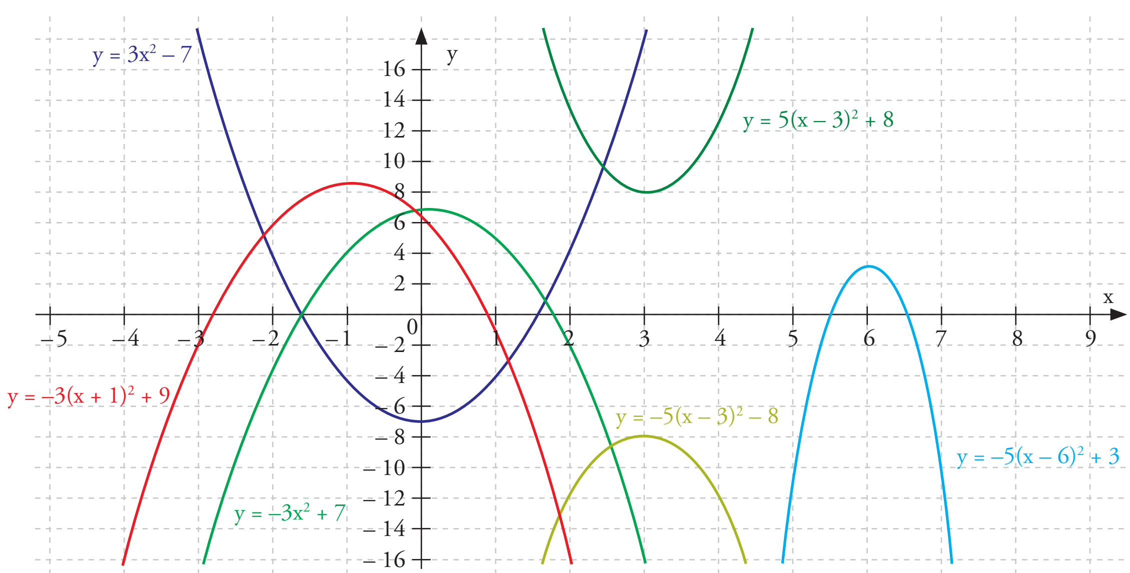
g) $f(x) = -3(x - 1)^2$

Deslocamentos verticais e/ou horizontais: a função $f(x) = a(x - h)^2 + v$

No caso mais geral possível, podemos ter a variação nos valores de uma grandeza **y**, a partir de certo valor **v**, diretamente proporcional ao quadrado da variação nos valores de **x**, a partir de certo valor **h**: em outras palavras, $y - v = k\,(x - h)^2$. Uma função deste tipo é tal que $f(x) = k\,(x - h)^2 + v$, e tem como gráfico também uma parábola, deslocada horizontalmente de um valor **h** em relação à parábola $y = kx^2$ e deslocada verticalmente de um valor **v** em relação à parábola $y = k\,(x - h)^2$. O vértice da parábola é o ponto de coordenadas (h,v). O gráfico a seguir traduz o que se afirmou anteriormente.



Observe, a seguir, alguns exemplos de gráficos desse tipo de função:



4. Construa os gráficos das seguintes funções e indique as coordenadas do vértice de cada uma delas:

a) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

b) $f(x) = -(x + 3)^2 - 1$

c) $f(x) = -(x - 1)^2 - 1$

d) $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

LIÇÃO DE CASA

5. Determine as coordenadas do vértice dos gráficos das seguintes funções e verifique se a função assume um valor máximo ou um valor mínimo em cada uma delas.

a) $f(x) = (x + 3)^2 - \dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = -(x - 2)^2 - \dfrac{5}{2}$

c) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

d) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}$

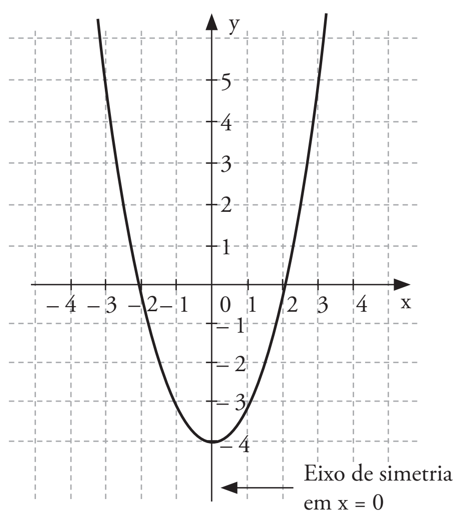
e) $f(x) = (x - 4)^2$

f) $f(x) = -x^2 + 2$

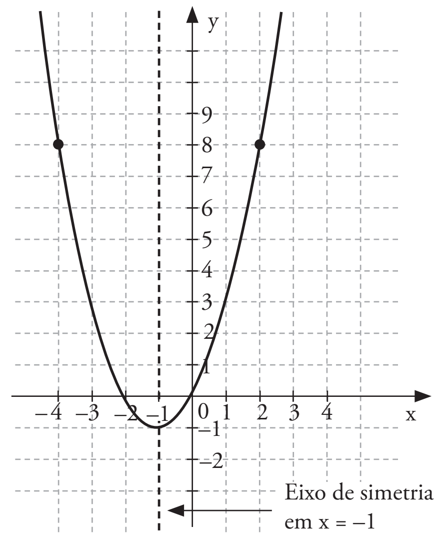
VOCÊ APRENDEU?

6. Sabemos que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, é uma parábola. A reta vertical que passa pelo vértice da parábola é seu eixo de simetria. Observe os gráficos a seguir:

(I) $f(x) = x^2 - 4$



(II) $f(x) = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$



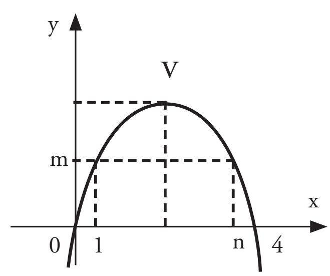
a) Na função (I), quando $x = 1$, qual é o valor correspondente de **y**?

b) Na função (II), quando $x = 3$, qual é o valor correspondente de **y**?

c) Complete a tabela com o valor correspondente de **x** ou de **y**.

Função I	**x**	2	–2	4		–5	
	y				12		21
Função II	**x**	–3	1	6		–5	
	y				16		27

7. A seguir está representado o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$.



a) Quais são as coordenadas do ponto **V**, vértice da parábola?

b) Quais são os valores de **m** e **n**, indicados no gráfico?

8. Determine a expressão algébrica de cada uma das funções de 2º grau representadas pelas seguintes figuras:

Figura 1

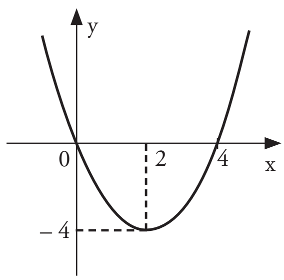


Figura 2

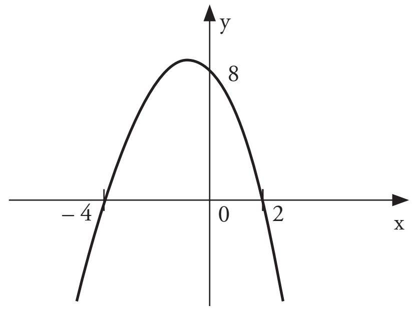
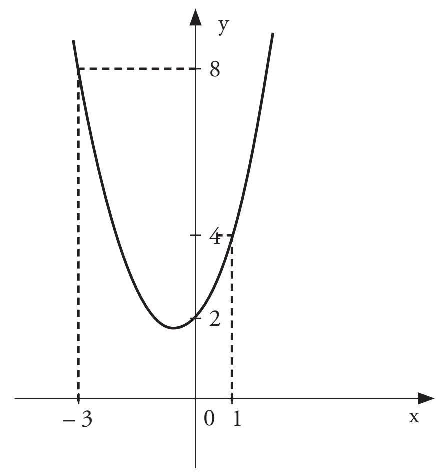


Figura 3



9. Considere as funções de 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ indicadas a seguir. Descubra se as equações de 2º grau correspondentes têm duas, uma ou nenhuma raiz real, calculando o valor da ordenada $\mathbf{y_v}$ do vértice da parábola, que é o gráfico da função. Ou seja, determine o número de raízes de cada equação sem resolvê-las.

a) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$

c) $f(x) = -2x^2 - 16x + 5$

d) $f(x) = -2x^2 + 10x - 13$

e) $f(x) = 11x^2 - 5x + \frac{1}{2}$

f) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$

10. Determine as raízes da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e o sinal da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todos os valores possíveis de **x**, em cada um dos casos apresentados:

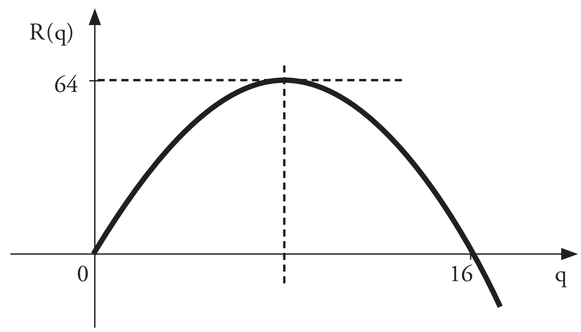
a) $3x^2 + 12x + 11 = 0$

b) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$

c) $-2x^2 + 10x - 13 = 0$

LIÇÃO DE CASA

11. O gráfico a seguir representa o rendimento bruto R(q) de uma empresa em função da quantidade **q** de produtos fabricados mensalmente. Os valores de **R** são expressos em milhares de reais, e a quantidade produzida **q**, em milhares de unidades. Sabe-se que a curva representada é uma parábola.



A partir das informações contidas no gráfico, responda:

a) Qual é a expressão algébrica da função R(q)?

b) Qual é o rendimento bruto máximo?

c) Qual é a quantidade produzida que maximiza o rendimento bruto da empresa?

d) Qual é o rendimento bruto que a empresa obtém para a produção de 15 mil unidades? E de 20 mil unidades? Como interpretar este último resultado?

12. Determine, para as funções a seguir, os valores máximos ou mínimos atingidos em cada caso, indicando o valor de **x** em tais extremos.

a) $f(x) = 3(x - 12)^2 + 100$

b) $f(x) = -x^2 + 10$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

d) $f(x) = 3x^2 + 30x + 75$

e) $f(x) = -x^2 + 10x$

f) $f(x) = x^2 + 8x + 21$

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 8
PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DE 2º GRAU EM MÚLTIPLOS CONTEXTOS; PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

São vários os contextos de nossa vida em que o conhecimento sobre as funções polinomiais de 2º grau nos permite organizar, avaliar e prever o comportamento de certos fenômenos, sejam eles sociais ou naturais.

O foco desta Situação de Aprendizagem é abordar alguns desses problemas, aplicando o que foi aprendido na Situação de Aprendizagem anterior.

VOCÊ APRENDEU?

1. Na administração de uma empresa, procura-se estabelecer relações matemáticas entre as grandezas envolvidas, tendo em vista a otimização da produção, ou seja, a busca de um custo mínimo ou de um rendimento máximo. Naturalmente, as relações obtidas decorrem de certas hipóteses sobre o modo de produção, que envolvem tanto a proporcionalidade direta quanto a inversa, a proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, o crescimento exponencial, entre outras possibilidades. Uma disciplina que trata da formulação de modelos matemáticos (fórmulas) para representar tais relações de interdependência chama-se **Pesquisa operacional**.

   Suponha que, em certa empresa de produtos eletrônicos, a organização da produção seja tal que o custo total **C** para produzir uma quantidade **q** de determinado produto seja apresentado pela função $C(q) = q^2 - 1\,000q + 800\,000$ (**C** em reais, **q** em unidades do produto).

   a) Determine o nível de produção (valor de **q**) que minimiza o custo total **C** e calcule o valor do custo mínimo.

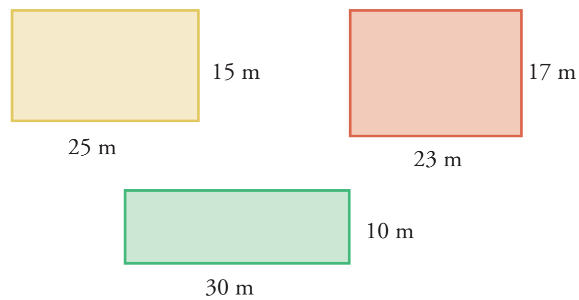
b) Represente o gráfico de C(q).

c) Para q = 0, o custo é igual a R$ 800 mil. Como pode ser interpretado tal fato?

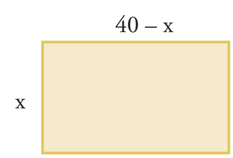
d) Qual é o nível de produção que corresponde a um custo de R$ 800 mil?

e) Do ponto de vista do custo, tanto faz um nível de produção q = 300 ou um nível de produção q = 700. E do ponto de vista do rendimento bruto (faturamento da empresa)?

2. Para delimitar um galinheiro em um amplo quintal, dispõe-se de 80 m (lineares) de uma tela. Deseja-se usar completamente a tela disponível, e a região cercada deve ser um retângulo. Fixado o perímetro, são inúmeras as possibilidades para os lados do retângulo, como podemos perceber nos exemplos a seguir.



A área **A** do retângulo é uma função do comprimento de seus lados. Entre todas as possibilidades para os lados, procura-se, naturalmente, aquela que corresponde à maior área possível para o retângulo.

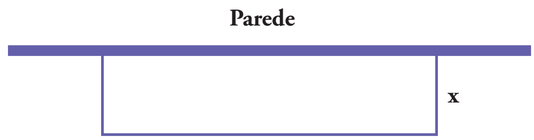


Dessa forma:

a) Quais devem ser as medidas dos lados do retângulo para que sua área seja a maior possível?

b) Qual é o valor da área máxima?

3. Deseja-se murar (cercar com muros) um terreno retangular utilizando-se de uma parede já existente no terreno. Sabe-se que o comprimento do muro que será construído para cercar os outros três lados do terreno deverá ter 36 metros de comprimento.



a) Expresse a área **A** desse terreno em função de **x** (medida de um dos lados do retângulo).

b) Construa o gráfico de **A** em função do lado **x**.

c) Calcule a área máxima que o terreno cercado pode ter e suas respectivas dimensões.

4. Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 200 quilos e engorda 2 quilos por dia. Inicialmente, o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois o bezerro ganhará mais peso. Entretanto, um de seus funcionários lembra o criador de que o preço de venda, que hoje é de 50 reais por quilo, está caindo R$ 0,40 por dia. A escolha da melhor data para vender o bezerro depende,

então, de duas variáveis: a engorda diária e a queda nos preços pagos por quilo. Com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual, pede-se:

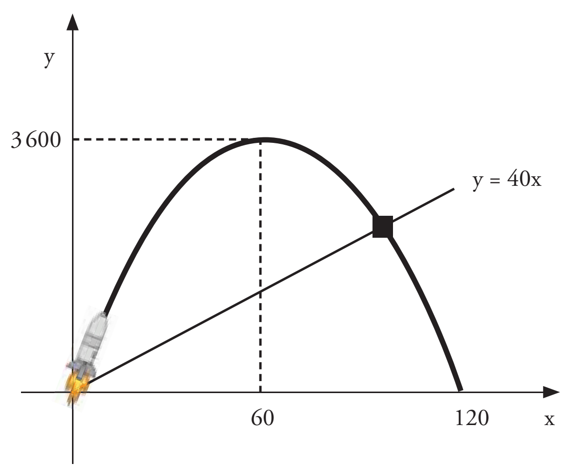
a) Determine a melhor data para se vender o bezerro, contada a partir de hoje.

b) Calcule o valor em reais que será arrecadado em tal venda.

c) Construa um gráfico que represente o valor **y** a ser arrecadado pelo criador na venda do bezerro (em reais) em função do tempo **x** de espera (em dias).

d) Determine quantos dias levará para que o total arrecadado pelo criador seja igual a zero.

5. Um foguete, que é lançado de uma base militar, apresenta um defeito em pleno voo e, segundo os cálculos, deverá cair sobre uma região habitada. O gráfico a seguir representa a trajetória desse foguete, sendo **x** e **y** dados em metros. O gráfico também apresenta a trajetória praticamente retilínea de um míssil que foi lançado da mesma base para interceptar o foguete e evitar um possível desastre. Suponha que a trajetória do míssil seja dada pela função y = 40x.



a) Com base nos dados do gráfico, encontre a sentença que representa a trajetória do foguete.

b) Calcule a que altura do solo o míssil interceptará o foguete.

LIÇÃO DE CASA

6. Em determinado país ocorreu uma epidemia provocada por uma espécie de vírus. Inicialmente, foram detectadas 2 mil pessoas infectadas. A estimativa dos epidemiologistas é a de que o número **N** de doentes cresça até o valor máximo **L**, que deverá ocorrer após seis semanas do aparecimento do vírus, devendo decrescer a partir de então. Supõe-se que a diferença N(t) – L seja diretamente proporcional ao quadrado da diferença entre **t** e 6, ou seja, quando dobra a distância entre **t** e 6 (valor que será o pico da doença), a queda no número de infectados torna-se quatro vezes maior:

$$N(t) = k(t - 6)^2 + L \quad (\mathbf{k} \text{ é uma constante})$$

Com base nesse modelo, e sabendo que duas semanas após o início da epidemia havia 2 100 pessoas infectadas, responda:

a) Quais são os valores de **k** e **L**?

b) Como será o gráfico de N(t)?

c) Qual será o número máximo de pessoas infectadas?

d) Depois de quantas semanas o número de infectados cairá a zero?

7. Em certo ambiente, a velocidade **V** de crescimento de uma população **N** é, em cada instante, diretamente proporcional ao valor de **N**, e também à diferença entre um valor limite **L**, estimado como o máximo admissível para uma vida sustentável no ambiente em questão. O valor de **N** em cada instante corresponde a $V = k \cdot N \cdot (L - N)$, sendo **k** uma constante positiva. Podemos dizer, então, que a velocidade **V** é uma função de **N**, expressa pela fórmula $V = f(N) = k \cdot N \cdot (L - N)$, ou seja, $V = f(N) = -kN^2 + kL \cdot N$.

Supondo que L = 100 000 habitantes e sabendo que, para N = 10 000, a velocidade de crescimento é igual a 900 habitantes por ano, responda:

a) qual é o valor da constante **k**?

b) para quais valores de **N** a velocidade de crescimento é igual a zero?

c) para quais valores de **N** a velocidade de crescimento da população é positiva, ou seja, a população cresce, e para quais valores de **N** a velocidade de crescimento é negativa, ou seja, a população decresce?

d) para qual valor de **N** a velocidade de crescimento é máxima?

e) qual é o gráfico de **V** em função de **N**?

8. Um empresário possui duas lojas de roupas. Entre os anos de 2000 e 2005, a receita $\mathbf{R_1}$ de uma das lojas, em milhares de reais, foi modelada pela função $R_1 = 0{,}7t^2 + 3{,}4t + 4$, onde **t** representa o tempo em anos. Durante o mesmo período, a receita $\mathbf{R_2}$, da segunda loja, em milhares de reais, foi modelada pela função $R_2 = 0{,}8t + 300$. Escreva uma função que representa a receita total das duas lojas, indicada por $\mathbf{R_t}$, verifique se essa receita possui um valor máximo ou mínimo e determine esse valor.

CONCEPÇÃO E COORDENAÇÃO GERAL
NOVA EDIÇÃO 2014-2017

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA – CGEB

Coordenadora
Maria Elizabete da Costa

Diretor do Departamento de Desenvolvimento Curricular de Gestão da Educação Básica
João Freitas da Silva

Diretora do Centro de Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional – CEFAF
Valéria Tarantello de Georgel

Coordenadora Geral do Programa São Paulo faz escola
Valéria Tarantello de Georgel

Coordenação Técnica
Roberto Canossa
Roberto Liberato
Suely Cristina de Albuquerque Bomfim

EQUIPES CURRICULARES

Área de Linguagens
Arte: Ana Cristina dos Santos Siqueira, Carlos Eduardo Povinha, Kátia Lucila Bueno e Roseli Ventrela.

Educação Física: Marcelo Ortega Amorim, Maria Elisa Kobs Zacarias, Mirna Leia Violin Brandt, Rosângela Aparecida de Paiva e Sergio Roberto Silveira.

Língua Estrangeira Moderna (Inglês e Espanhol): Ana Paula de Oliveira Lopes, Jucimeire de Souza Bispo, Marina Tsunokawa Shimabukuro, Neide Ferreira Gaspar e Sílvia Cristina Gomes Nogueira.

Língua Portuguesa e Literatura: Angela Maria Baltieri Souza, Claricia Akemi Eguti, Idê Moraes dos Santos, João Mário Santana, Kátia Regina Pessoa, Mara Lúcia David, Marcos Rodrigues Ferreira, Roseli Cordeiro Cardoso e Rozeli Frasca Bueno Alves.

Área de Matemática
Matemática: Carlos Tadeu da Graça Barros, Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rodrigo Soares de Sá, Rosana Jorge Monteiro, Sandra Maira Zen Zacarias e Vanderley Aparecido Cornatione.

Área de Ciências da Natureza
Biologia: Aparecida Kida Sanches, Elizabeth Reymi Rodrigues, Juliana Pavani de Paula Bueno e Rodrigo Ponce.

Ciências: Eleuza Vania Maria Lagos Guazzelli, Gisele Nanini Mathias, Herbert Gomes da Silva e Maria da Graça de Jesus Mendes.

Física: Carolina dos Santos Batista, Fábio Bresighello Beig, Renata Cristina de Andrade Oliveira e Tatiana Souza da Luz Stroeymeyte.

Química: Ana Joaquina Simões S. de Matos Carvalho, Jeronimo da Silva Barbosa Filho, João Batista Santos Junior e Natalina de Fátima Mateus.

Área de Ciências Humanas
Filosofia: Emerson Costa, Tânia Gonçalves e Teônia de Abreu Ferreira.

Geografia: Andréia Cristina Barroso Cardoso, Débora Regina Aversan e Sérgio Luiz Damiati.

História: Cynthia Moreira Marcucci, Maria Margarete dos Santos e Walter Nicolas Otheguy Fernandez.

Sociologia: Alan Vitor Corrêa, Carlos Fernando de Almeida e Tony Shigueki Nakatani.

PROFESSORES COORDENADORES DO NÚCLEO PEDAGÓGICO

Área de Linguagens
Educação Física: Ana Lucia Steidle, Eliana Cristine Budisk de Lima, Fabiana Oliveira da Silva, Isabel Cristina Albergoni, Karina Xavier, Katia Mendes e Silva, Liliane Renata Tank Gullo, Marcia Magali Rodrigues dos Santos, Mônica Antonia Cucatto da Silva, Patrícia Pinto Santiago, Regina Maria Lopes, Sandra Pereira Mendes, Sebastiana Gonçalves Ferreira Viscardi, Silvana Alves Muniz.

Língua Estrangeira Moderna (Inglês): Célia Regina Teixeira da Costa, Cleide Antunes Silva, Ednéa Boso, Edney Couto de Souza, Elana Simone Schiavo Caramano, Eliane Graciela dos Santos Santana, Elisabeth Pacheco Lomba Kozokoski, Fabiola Maciel Saldão, Isabel Cristina dos Santos Dias, Juliana Munhoz dos Santos, Kátia Vitorian Gellers, Lídia Maria Batista Bomfim, Lindomar Alves de Oliveira, Lúcia Aparecida Arantes, Mauro Celso de Souza, Neusa A. Abrunhosa Tápias, Patrícia Helena Passos, Renata Motta Chicoli Belchior, Renato José de Souza, Sandra Regina Teixeira Batista de Campos e Silmara Santade Masiero.

Língua Portuguesa: Andrea Righeto, Edilene Bachega R. Viveiros, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Graciana B. Ignacio Cunha, Letícia M. de Barros L. Viviani, Luciana de Paula Diniz, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Cristina Cunha Riondet Costa, Maria José de Miranda Nascimento, Maria Márcia Zamprônio Pedroso, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Ronaldo Cesar Alexandre Formici, Selma Rodrigues e Sílvia Regina Peres.

Área de Matemática
Matemática: Carlos Alexandre Emídio, Clóvis Antonio de Lima, Delizabeth Evanir Malavazzi, Edinei Pereira de Sousa, Eduardo Granado Garcia, Evaristo Glória, Everaldo José Machado de Lima, Fabio Augusto Trevisan, Inês Chiarelli Dias, Ivan Castilho, José Maria Sales Júnior, Luciana Moraes Funada, Luciana Vanessa de Almeida Buranello, Mário José Pagotto, Paula Pereira Guanais, Regina Helena de Oliveira Rodrigues, Robson Rossi, Rodrigo Soares de Sá, Rosana Jorge Monteiro, Rosângela Teodoro Gonçalves, Roseli Soares Jacomini, Silvia Ignês Peruquetti Bortolatto e Zilda Meira de Aguiar Gomes.

Área de Ciências da Natureza
Biologia: Aureli Martins Sartori de Toledo, Evandro Rodrigues Vargas Silvério, Fernanda Rezende Pedroza, Regiani Braguim Chioderoli e Rosimara Santana da Silva Alves.

Ciências: Davi Andrade Pacheco, Franklin Julio de Melo, Liamara P. Rocha da Silva, Marceline de Lima, Paulo Garcez Fernandes, Paulo Roberto Orlandi Valdastri, Rosimeire da Cunha e Wilson Luís Prati.

Física: Ana Claudia Cossini Martins, Ana Paula Vieira Costa, André Henrique Ghelfi Rufino, Cristiane Gislene Bezerra, Fabiana Hernandes M. Garcia, Leandro dos Reis Marques, Marcio Bortoletto Fessel, Marta Ferreira Mafra, Rafael Plana Simões e Rui Buosi.

Química: Armenak Bolean, Cátia Lunardi, Cirila Tacconi, Daniel B. Nascimento, Elizandra C. S. Lopes, Gerson N. Silva, Idma A. C. Ferreira, Laura C. A. Xavier, Marcos Antônio Gimenes, Massuko S. Warigoda, Roza K. Morikawa, Sílvia H. M. Fernandes, Valdir P. Berti e Willian G. Jesus.

Área de Ciências Humanas
Filosofia: Álex Roberto Genelhu Soares, Anderson Gomes de Paiva, Anderson Luiz Pereira, Claudio Nitsch Medeiros e José Aparecido Vidal.

Geografia: Ana Helena Veneziani Vitor, Célio Batista da Silva, Edison Luiz Barbosa de Souza, Edivaldo Bezerra Viana, Elizete Buranello Perez, Márcio Luiz Verni, Milton Paulo dos Santos, Mônica Estevan, Regina Célia Batista, Rita de Cássia Araujo, Rosinei Aparecida Ribeiro Libório, Sandra Raquel Scassola Dias, Selma Marli Trivellato e Sonia Maria M. Romano.

História: Aparecida de Fátima dos Santos Pereira, Carla Flaitt Valentini, Claudia Elisabete Silva, Cristiane Gonçalves de Campos, Cristina de Lima Cardoso Leme, Ellen Claudia Cardoso Doretto, Ester Galesi Gryga, Karin Sant'Ana Kossling, Marcia Aparecida Ferrari Salgado de Barros, Mercia Albertina de Lima Camargo, Priscila Lourenço, Rogerio Sicchieri, Sandra Maria Fodra e Walter Garcia de Carvalho Vilas Boas.

Sociologia: Anselmo Luis Fernandes Gonçalves, Celso Francisco do Ó, Lucila Conceição Pereira e Tânia Fetchir.

Apoio:
Fundação para o Desenvolvimento da Educação - FDE

CTP, Impressão e acabamento
Gráfica e Editora Posigraf

GESTÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO EDITORIAL 2014-2017

FUNDAÇÃO CARLOS ALBERTO VANZOLINI

Presidente da Diretoria Executiva
Antonio Rafael Namur Muscat

Vice-presidente da Diretoria Executiva
Alberto Wunderler Ramos

GESTÃO DE TECNOLOGIAS APLICADAS À EDUCAÇÃO

Direção da Área
Guilherme Ary Plonski

Coordenação Executiva do Projeto
Angela Sprenger e Beatriz Scavazza

Gestão Editorial
Denise Blanes

Equipe de Produção

Editorial: Amarilis L. Maciel, Angélica dos Santos Angelo, Bóris Fatigati da Silva, Bruno Reis, Carina Carvalho, Carla Fernanda Nascimento, Carolina H. Mestriner, Carolina Pedro Soares, Cíntia Leitão, Eloiza Lopes, Érika Domingues do Nascimento, Flávia Medeiros, Gisele Manoel, Jean Xavier, Karinna Alessandra Carvalho Taddeo, Leandro Calbente Câmara, Leslie Sandes, Mainã Greeb Vicente, Marina Murphy, Michelangelo Russo, Natália S. Moreira, Olivia Frade Zambone, Paula Felix Palma, Priscila Risso, Regiane Monteiro Pimentel Barboza, Rodolfo Marinho, Stella Assumpção Mendes Mesquita, Tatiana F. Souza e Tiago Jonas de Almeida.

Direitos autorais e iconografia: Beatriz Fonseca Micsik, Érica Marques, José Carlos Augusto, Juliana Prado da Silva, Marcus Ecclissi, Maria Aparecida Acunzo Forli, Maria Magalhães de Alencastro e Vanessa Leite Rios.

Edição e Produção editorial: R2 Editorial, Jairo Souza Design Gráfico e Occy Design (projeto gráfico).

CONCEPÇÃO DO PROGRAMA E ELABORAÇÃO DOS CONTEÚDOS ORIGINAIS

COORDENAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DOS CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS DOS CADERNOS DOS PROFESSORES E DOS CADERNOS DOS ALUNOS
Ghisleine Trigo Silveira

CONCEPÇÃO
Guiomar Namo de Mello, Lino de Macedo, Luis Carlos de Menezes, Maria Inês Fini (coordenadora) e Ruy Berger (em memória).

AUTORES

Linguagens
Coordenador de área: Alice Vieira.
Arte: Gisa Picosque, Mirian Celeste Martins, Geraldo de Oliveira Suzigan, Jéssica Mami Makino e Sayonara Pereira.

Educação Física: Adalberto dos Santos Souza, Carla de Meira Leite, Jocimar Daolio, Luciana Venâncio, Luiz Sanches Neto, Mauro Betti, Renata Elsa Stark e Sérgio Roberto Silveira.

LEM – Inglês: Adriana Ranelli Weigel Borges, Alzira da Silva Shimoura, Lívia de Araújo Donnini Rodrigues, Priscila Mayumi Hayama e Sueli Salles Fidalgo.

LEM – Espanhol: Ana María López Ramírez, Isabel Gretel María Eres Fernández, Ivan Rodrigues Martin, Margareth dos Santos e Neide T. Maia González.

Língua Portuguesa: Alice Vieira, Débora Mallet Pezarim de Angelo, Eliane Aparecida de Aguiar, José Luís Marques López Landeira e João Henrique Nogueira Mateos.

Matemática
Coordenador de área: Nílson José Machado.
Matemática: Nílson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo e Walter Spinelli.

Ciências Humanas
Coordenador de área: Paulo Miceli.
Filosofia: Paulo Miceli, Luiza Christov, Adilton Luís Martins e Renê José Trentin Silveira.

Geografia: Angela Corrêa da Silva, Jaime Tadeu Oliva, Raul Borges Guimarães, Regina Araujo e Sérgio Adas.

História: Paulo Miceli, Diego López Silva, Glaydson José da Silva, Mônica Lungov Bugelli e Raquel dos Santos Funari.

Sociologia: Heloisa Helena Teixeira de Souza Martins, Marcelo Santos Masset Lacombe, Melissa de Mattos Pimenta e Stella Christina Schrijnemaekers.

Ciências da Natureza
Coordenador de área: Luis Carlos de Menezes.
Biologia: Ghisleine Trigo Silveira, Fabíola Bovo Mendonça, Felipe Bandoni de Oliveira, Lucilene Aparecida Esperante Limp, Maria Augusta Querubim Rodrigues Pereira, Olga Aguilar Santana, Paulo Roberto da Cunha, Rodrigo Venturoso Mendes da Silveira e Solange Soares de Camargo.

Ciências: Ghisleine Trigo Silveira, Cristina Leite, João Carlos Miguel Tomaz Micheletti Neto, Julio Cézar Foschini Lisbôa, Lucilene Aparecida Esperante Limp, Maíra Batistoni e Silva, Maria Augusta Querubim Rodrigues Pereira, Paulo Rogério Miranda Correia, Renata Alves Ribeiro, Ricardo Rechi Aguiar, Rosana dos Santos Jordão, Simone Jaconetti Ydi e Yassuko Hosoume.

Física: Luis Carlos de Menezes, Estevam Rouxinol, Guilherme Brockington, Ivã Gurgel, Luís Paulo de Carvalho Piassi, Marcelo de Carvalho Bonetti, Maurício Pietrocola Pinto de Oliveira, Maxwell Roger da Purificação Siqueira, Sonia Salem e Yassuko Hosoume.

Química: Maria Eunice Ribeiro Marcondes, Denilse Morais Zambom, Fabio Luiz de Souza, Hebe Ribeiro da Cruz Peixoto, Isis Valença de Sousa Santos, Luciane Hiromi Akahoshi, Maria Fernanda Penteado Lamas e Yvone Mussa Esperidião.

Caderno do Gestor
Lino de Macedo, Maria Eliza Fini e Zuleika de Felice Murrie.

* Nos Cadernos do Programa São Paulo faz escola são indicados sites para o aprofundamento de conhecimentos, como fonte de consulta dos conteúdos apresentados e como referências bibliográficas. Todos esses endereços eletrônicos foram checados. No entanto, como a internet é um meio dinâmico e sujeito a mudanças, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo não garante que os sites indicados permaneçam acessíveis ou inalterados.
* Os mapas reproduzidos no material são de autoria de terceiros e mantêm as características dos originais, no que diz respeito à grafia adotada e à inclusão e composição dos elementos cartográficos (escala, legenda e rosa dos ventos).

Validade: 2014 – 2017

GOVERNO DO ESTADO
SÃO PAULO

Secretaria da Educação